Skriptum zur Vorlesung:

Nicht-Monotones Schließen

SS '95

Dr. Jürgen Dix
Universität Koblenz-Landau
Institut für Informatik

August 1995

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Vorwort

... aus: mancherley Meistern und Buechern gezogen
und durch einander gemengt
wie eine Biene aùs: mancherley Blumen jr sefftlin seùget
vnd jnn einander menget.
— Martin Luther, *Vorrede auf das Buch Jesu Syrach*

Dieses Skriptum faßt den Stoff der jeweils im Sommersemester '94 und '95 gehaltenen dreistündigen Vorlesung *Nicht-Monotones Schließen* zusammen. Es besteht, wie die Vorlesungen, aus 5 Teilen.

Im ersten Kapitel, *Einleitung*, wird in die Problematik eingeführt und motiviert, daß klassische Deduktionssysteme für viele Bereiche der Wissensrepräsentation entweder zu schwach oder zu stark (weil inkonsistent) sind. Den in der Vorlesung behandelten Stoff stellen wir in Form einer Tabelle überblicksartig dar. Sodann werden einige im folgenden benötigten Grundbegriffe aus der universellen Algebra, der Theorie der Wohlordnungen (Ordinalzahlen, transfinite Induktion) und über Fixpunkte von Operatoren bereitgestellt. Wir geben dann eine Liste von einfachen Beispielen an, die jeweils nichtmonotone Aspekte behandeln. Schließlich führen wir zwei vorläufige nichtmonotone Ansätze ein (*CWA* bzw. *maximal konsistente Teilmengen*) und untersuchen diese an den vorherigen Beispielen.

Im zweiten Kapitel, *Default Logik*, wird eine der ersten formal befriedigenden nichtmonotonen Logiken (sie geht auf einen Artikel von Raymond Reiter aus dem Jahre 1980 im *Journal of Artificial Intelligence* zurück) vollständig dargestellt. Es handelt sich hierbei um eine Erweiterung der klassischen Logik, um zusätzliche Inferenzregeln, die *Defaults*. Die Default Logik gehört zu den sogenannten *Fixpunkt-Logiken*.

Im dritten Kapitel, *Circumscription*, wird ein völlig anderer Ansatz (der auf einem Artikel von John McCarthy beruht und im gleichen Band des *Journals of Artificial Intelligence* veröffentlicht wurde wie Reiters Artikel) vorgestellt. Dieser gehört zu den sogenannten *Modell-Präferenz-Logiken* und ist näher an der klassischen Logik, da hier keine zusätzlichen Inferenzregeln eingeführt werden.

Im vierten Kapitel schließlich betrachten wir keine spezifische nichtmonotone Logik, sondern wir fragen uns, welche abstrakten Eigenschaften die Konsequenzrelationen nichtmonotoner Logiken haben. Offenbar läßt sich jedem nichtmonotonen System eine Konsequenzrelation $\mid\!\sim$ zuordnen: $\Phi \mid\!\sim \psi$ bedeutet dabei, daß "die

Formel ϕ aus der Formelmenge Φ folgt". Wir fragen nach sinnvollen Eigenschaften dieser Relation $\mid\!\sim$. Dieser Ansatz geht im wesentlichen auf Arbeiten von Dov Gabbay und David Makinson aus den Jahren 1985-1989 sowie einen Artikel von Sarit Kraus, Daniel Lehmann und Menachem Magidor im *Journal of Artificial Intelligence* aus dem Jahre 1990 zurück.

Im fünften Kapitel benutzen wir den im vorigen Kapitel vorgestellten Ansatz, um ein weiteres nichtmonotones System, den *rationalen Abschluß* von Lehmann und Magidor, vorzustellen.

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation

Wir zeigen zunächst, wie klassische Deduktionssysteme definiert werden. Dann versuchen wir zu motivieren, warum nichtmonotone Systeme gebraucht werden. Wir zeigen dies am Beispiel der *Datenbanken*, motivieren den Gebrauch von *Faustregeln* im alltäglichen Schließen und gehen auf die Möglichkeit ein, aus einer gegebenen Theorie *Erklärungen* für bestimmte Beobachtungen und Sachverhalte abzuleiten.

1.1.1 Klassische Deduktionssysteme

Klassische Logiken lassen sich üblicherweise durch die Angabe zweier Dinge spezifizieren:

1. einer Menge von **Axiomen** und

2. einer Menge von **Schlußregeln**.

Axiome geben allgemeingültige Aussagen wider (etwa $\phi \leftrightarrow \phi$, $\phi \vee \neg\phi$) und Schlußregeln erlauben es, von gewissen Formeln zu anderen Formeln überzugehen (etwa "Falls ϕ und $\phi \to \psi$ dann ψ": Diese Regel heißt *Modus Ponens*).

Durch Angabe verschiedener Axiomenmengen und Schlußregeln kann man verschiedene Logiken in uniformer Weise definieren. Formal macht man dies durch Definition einer Folgerungsrelation $\vdash \subseteq \mathrm{Pot}(\mathbf{Fml}) \times \mathbf{Fml}$:

$$\Phi \vdash \psi \text{ bedeutet } \textit{"aus der Menge } \Phi \textit{ ist die Formel } \psi \textit{ ableitbar"}.$$

Diese Relation ist durch Induktion in natürlicher Weise definiert: zunächst sind die Axiome (sozusagen im nullten Schritt) ableitbar. Im nächsten Schritt sind alle Formeln, die man durch Anwendung der Schlußregeln auf schon abgeleitete Formeln erhält, auch ableitbar. Auf diese Weise erhält man immer mehr ableitbare Formeln und die Ableitungen werden immer länger. Ableitbare Formeln sind also solche, die man nach endlich vielen Schritten durch die beschriebene Prozedur gewinnt.

Die Schlußregeln, die man üblicherweise verwendet, sind sehr einfach: So kann man etwa sofort entscheiden, ob eine Regel in einer Situation angewandt werden kann oder nicht. Regeln der Form "Falls ϕ und heute ist Vollmond, dann ψ" werden **nicht** zugelassen. Dies hat zur Folge, daß die Relation $\vdash$ folgende Eigenschaft hat: (Φ, Φ' sind beliebige Formelmengen, ψ ist eine beliebige Formel)

Monotonie: Falls $\Phi \vdash \psi$ so auch $\Phi \cup \Phi' \vdash \psi$.

1.1.2 Warum Nichtmonotonie?

1. Datenbanken

Üblicherweise sind nur positive Fakten in einer Datenbank enthalten, z.B. eine Liste von verfügbaren Flügen. Klassisch gesehen kann keine negative Information aus den bekannten Fakten abgeleitet werden. Man hätte aber gerne, daß aus

$$\{\mathbf{flug}(\mathbf{M}, \mathbf{B}, 9.00), \mathbf{flug}(\mathbf{M}, \mathbf{B}, 12.00), \mathbf{flug}(\mathbf{M}, \mathbf{B}, 15.00), \mathbf{flug}(\mathbf{M}, \mathbf{B}, 18.00\}$$

auch

$$\neg\mathbf{flug}(\mathbf{M}, \mathbf{B}, 11.00)$$

folgt. D.h., da $\mathbf{flug}(\mathbf{M}, \mathbf{B}, 11.00)$ nicht explizit aufgelistet ist und wir annehmen können, daß die Tabelle vollständig ist, schliessen wir, daß ein solcher Flug nicht existiert.

Die klassische Logik ist zu schwach, um solche Ableitungen zu erlauben: Wir können weder $\mathbf{flug}(\mathbf{M}, \mathbf{B}, 11.00)$ noch $\neg\mathbf{flug}(\mathbf{M}, \mathbf{B}, 11.00)$ ableiten. Daher benötigen wir stärkere Systeme.

2. Defaults

Im sogenannten *Common-Sense-Reasoning* und in der Wissensrepräsentation ist ein Sachverhalt oft nicht genügend spezifiziert, da gewisse Hintergrundinformationen nötig sind. Im obigen Datenbank-Beispiel haben wir die Hintergrundinformation *"Die Liste ist vollständig"* benutzt.

Anstatt streng logischer Schlüsse benutzen Menschen eher *Faustregeln* (engl. *Defaults*). In klassischer (monotoner) Logik sind solche Sachverhalte nur sehr umständlich auszudrücken.

Beispiel 1.1.1 (Tweety und Fred)
Betrachten wir die folgenden beiden Faustregeln*:*

1. $\mathbf{vogel}(\mathbf{x}) \mid\!\sim \mathbf{fliegt}(\mathbf{x})$*: Normalerweise können Vögel fliegen,*

2. $\mathbf{pinguin}(\mathbf{x}) \mid\!\sim \neg\mathbf{fliegt}(\mathbf{x})$*: Normalerweise können Pinguine nicht fliegen.*

Angenommen, wir wissen auch noch, daß Pinguine Vögel sind und daß sowohl **tweety** *als auch* **fred** *zwei bestimmte Vögel sind. Natürlich ist es sinnvoll, aus diesen Informationen abzuleiten, daß sowohl* **tweety** *als auch* **fred** *fliegen können.*

Bisher können wir diesen Sachverhalt auch sehr gut in der klassischen Logik ausdrücken, nämlich durch die beiden Implikationen

$$\forall \mathbf{x}(\mathbf{vogel}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{fliegt}(\mathbf{x})),\ \forall \mathbf{x}(\mathbf{pinguin}(\mathbf{x}) \rightarrow \neg\mathbf{fliegt}(\mathbf{x})),$$

zusammen mit den Fakten $\mathbf{vogel}(\mathbf{tweety}), \mathbf{vogel}(\mathbf{fred})$ *und* $\forall \mathbf{x}(\mathbf{pinguin}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{vogel}(\mathbf{x}))$.

Nehmen wir nun an, unser Wissen vergrößert sich und wir erfahren, daß **fred** *ein Pinguin ist. Fügen wir* $\mathbf{pinguin}(\mathbf{fred})$ *zu unserer Formelmenge hinzu, können wir plötzlich alles mögliche ableiten:* $\mathbf{fliegt}(\mathbf{fred}), \neg\mathbf{fliegt}(\mathbf{fred})$ — *unsere Formelmenge ist also* inkonsistent. *Wir können dann tatsächlich jede beliebige Formel ableiten, also auch* $\neg\mathbf{vogel}(\mathbf{tweety})$, $\neg\mathbf{fliegt}(\mathbf{tweety})$, $\forall \mathbf{x}(\mathbf{fliegt}(\mathbf{x}) \leftrightarrow \neg\mathbf{fliegt}(\mathbf{x}))$.

Man könnte aber auch vorsichtiger vorgehen und die obigen Implikationen wie folgt verfeinern

$$\forall \mathbf{x}((\mathbf{vogel}(\mathbf{x}) \wedge \neg\mathbf{pinguin}(\mathbf{x})) \rightarrow \mathbf{fliegt}(\mathbf{x})),\ \forall \mathbf{x}(\mathbf{pinguin}(\mathbf{x}) \rightarrow \neg\mathbf{fliegt}(\mathbf{x})).$$

Dann hätte man zwar die Inkonsistenz vermieden, aber man kann nicht mehr

$$\mathbf{fliegt}(\mathbf{tweety})$$

ableiten, da es keine Möglichkeit gibt, $\neg\mathbf{pinguin}(\mathbf{tweety})$ *abzuleiten.*

Dieses Beispiel zeigt, daß monotone Logiken sehr schlecht zur Formalisierung geeignet sind, denn wir möchten ja

1. $\Phi \mid\!\sim \mathbf{fliegt}(\mathbf{fred})$ und
2. $\Phi \cup \{\mathbf{pinguin}(\mathbf{fred})\} \mid\!\sim \neg\mathbf{fliegt}(\mathbf{fred})$.

In jeder monotonen Logik ist auch im zweiten Fall $\mathbf{fliegt}(\mathbf{fred})$ immer noch ableitbar und daher ergibt sich zwangsläufig eine Inkonsistenz.

Wir suchen also nach Logiken, die stärker sind als die klassische Logik, ohne allerdings inkonsistent zu werden. Wir müssen dabei in Kauf nehmen, daß frühere Schlüsse eventuell später zurückgenommen werden (im obigen Beispiel muß $\mathbf{fliegt}(\mathbf{fred})$ zurückgenommen werden).

3. Erklärungen/Rechtfertigungen

Angenommen, ein gewisser Sachverhalt gilt. Was sind die Gründe dafür? Betrachten wir das folgende Beispiel. Wir wissen, daß meistens der Rasen dann naß wird, wenn es regnet. Er wird aber auch naß, wenn der Rasensprenger an ist (und dann bleibt die Straße trocken). Damit ergeben sich verschiedene Erklärungen, je nach Wissensstand:

> Der Rasen ist naß.
> *1. Erklärung: Es hat geregnet.*
> Aber die Straße ist trocken.
> *Revidierte Erklärung: Der Rasensprenger war an.*

Dieses Beispiel führt zum *Prinzip der Abduktion*:

> Wenn ψ gilt und $\phi \rightarrow \psi$, dann schließen wir auf ϕ.

Abstrakte Bedingungen (von $\mid\!\sim$)	**Logiken (Definition von $\mid\!\sim$)**	**Beweismethoden (Implem. von $\mid\!\sim$)**
präferentiell kumulativ	**Modell Präferenz Logiken** - CWA - Circumscription - Konditionale Logiken	Negation-As-Failure im Logischen Prog.
nicht kumulativ	**Fixpunkt Logiken** - Default Logiken - Modale Logiken	Justification based Truth Maintenance Systeme
	Abduktive Methoden	Assumption based Truth Maintenance Systeme
rational	**Rationaler Abschluß** $\mathcal{K}^{\mathbf{rat}}$	spezieller Theorembeweiser

Tabelle 1.1: Übersicht

1.2 Übersicht

Tabelle 1.1 gibt eine grobe Übersicht des in dieser Vorlesung behandelten Stoffes. Die erste Spalte zählt abstrakte Eigenschaften von nichtmonotonen Konsequenzrelationen $\mid\!\sim$ auf. Die nächste Spalte unterscheidet zwischen verschiedenen Klassen von Logiken. Die letzte Spalte schließlich stellt die entsprechenden Beweismethoden gegenüber.

1.3 Grundlagen, Terminologie

1.3.1 Hilfsmittel aus der Algebra

Definition 1.3.1 (Eigenschaften von Relationen)
Sei $\mathbf{R}$ *eine binäre Relation auf der Menge* $\mathbf{X}$*, dann heißt* $\mathbf{R}$

1. **reflexiv**, *falls* $\forall x \in X : R(x,x)$,
2. **antisymmetrisch**, *falls* $\forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{X} : \mathbf{R}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \wedge \mathbf{R}(\mathbf{y},\mathbf{x}) \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$,
3. **transitiv**, *falls* $\forall x,y,z \in X : R(x,y) \wedge R(y,z) \Rightarrow R(x,z)$,

4. **zusammenhängend**, *falls* $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X} : \mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \vee \mathbf{R}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.

Definition 1.3.2 (Poset: partiell geordnete Menge)
Sei im folgenden $\preceq$ eine binäre Relation auf $\mathbf{X}$. Wir schreiben auch $(\mathbf{X}, \preceq)$.

1. *$(X,\preceq)$ heißt* **Poset**, *falls $\preceq$ reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.*
2. $\mathbf{Y} \subseteq \mathbf{X}$ *heißt* **Kette**, *falls* $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{Y} :\ \mathbf{x} \preceq \mathbf{y} \ \vee\ \mathbf{y} \preceq \mathbf{x}$.
3. $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ *heißt* **untere (bzw. obere) Schranke** *von* $\mathbf{Y} \subseteq \mathbf{X}$, *falls* $\forall \mathbf{y} \in \mathbf{Y} : \mathbf{x} \preceq \mathbf{y}$ *(bzw.* $\mathbf{y} \preceq \mathbf{y}$*).*
4. $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ *heißt* **Infimum (bzw. Supremum)** *von* $\mathbf{Y} \subseteq \mathbf{X}$, *falls* $\mathbf{x}$ *die* **größte untere (bzw. kleinste obere) Schranke** *von* $\mathbf{Y} \subseteq \mathbf{X}$ *ist.*
   Wir schreiben dafür auch $\mathbf{inf}(\mathbf{Y})$ *(bzw.* $\mathbf{sup}(\mathbf{Y})$*).*
5. $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ *heißt* **minimal (bzw. maximal)**, *falls für kein* $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$ *gilt:* $\mathbf{y} \preceq \mathbf{x}$ *(bzw.* $\mathbf{x} \preceq \mathbf{y}$*).*
6. $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ *heißt* **kleinstes (bzw. größtes) Element**, *falls* $\forall \mathbf{y} \in \mathbf{X}$*:* $\mathbf{x} \preceq \mathbf{y}$ *(bzw.* $\mathbf{y} \preceq \mathbf{y}$*).*
7. $(\mathbf{X}, \preceq)$ *heißt* **lineare** *oder einfach nur* **Ordnung**, *falls* $(\mathbf{X}, \preceq)$ *zusammenhängend ist.*

Beispiel 1.3.3
Sei $\mathbf{X}$ eine nichtleere Menge. Dann ist $(Pot(\mathbf{X}), \subseteq)$ ein Poset. $\emptyset$ ist das kleinste und $\mathbf{X}$ das größte Element. Betrachten wir nun $\mathbf{M} :=_{\mathbf{def}} (Pot(\mathbf{X}) \setminus \{\emptyset, \mathbf{X}\}, \subseteq)$. $\mathbf{M}$ ist ebenfalls ein Poset, hat aber kein kleinstes bzw. größtes Element. Die Menge der maximalen Elemente von $\mathbf{M}$ besteht aus allen Mengen

$$\mathcal{X}_{\mathbf{a}} :=_{\mathbf{def}} \mathbf{X} \setminus \{\mathbf{a}\}$$

wobei $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$. Es gibt also soviele maximale Mengen wie Elemente in $\mathbf{X}$. Die minimalen Elemente sind alle einelementigen Teilmengen von $\mathbf{X}$:

$$\mathcal{Y}_{\mathbf{a}} :=_{\mathbf{def}} \{\mathbf{a}\}$$

wobei $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$.

Theorem 1.3.4 (Zornsches Lemma)
Sei $(\mathbf{X}, \preceq)$ ein nichtleerer Poset. Außerdem besitze jede Kette $\mathbf{Y} \subseteq \mathbf{X}$ eine obere (bzw. untere) Schranke in $\mathbf{X}$. Dann gibt es für jedes $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ ein maximales (bzw. minimales) Element $\mathbf{max_x}$ (bzw. $\mathbf{min_x}$) mit: $\mathbf{x} \preceq \mathbf{max_x}$ (bzw. $\mathbf{min_x} \preceq \mathbf{x}$).

Korollar 1.3.5 (Zornsches Lemma angewandt auf $(\mathbf{Pot}(\mathbf{X}), \subseteq)$)
Sei $\mathcal{Y} \subseteq Pot(\mathbf{X})$. Wir setzen voraus, daß für jede Teilfamilie $\mathcal{Y}_0 \subseteq \mathcal{Y}$ mit $\forall \mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2 \in \mathcal{Y}_0$: $\mathbf{Z}_1 \subseteq \mathbf{Z}_2 \vee \mathbf{Z}_2 \subseteq \mathbf{Z}_1$ gilt: $\bigcup \mathcal{L}_0 \in \mathcal{Y}$ (bzw. $\bigcap \mathcal{L}_0 \in \mathcal{Y}$).
Dann gibt es für jedes $\mathbf{Y} \in \mathcal{Y}$ ein maximales (bzw. minimales) Element in $\mathcal{Y}$, das Y enthält (bzw. das in Y enthalten ist).

1.3.2 Ordinalzahlen, Induktion

Definition 1.3.6 (Wohlordnung)
$(\mathbf{X}, \preceq)$ *heißt* Wohlordnung *(oder* $\preceq$ Wohlordnung *auf* $\mathbf{X}$*), falls gilt :*

- $(\mathbf{X}, \preceq)$ *ist ein Poset,*
- *jede nichtleere Teilmenge* $\mathbf{Y} \subseteq \mathbf{X}$ *besitzt ein kleinstes Element.*

So bilden etwa die natürlichen Zahlen $(\mathbb{N}, \leq)$ mit ihrer natürlichen Ordnung eine Wohlordnung. Die rationalen Zahlen bilden keine Wohlordnung, man betrachte etwa das offene Intervall $]0,1[$. Es gibt in diesem Intervall kein kleinstes und kein größtes Element.

Wir wollen im folgenden die natürlichen Zahlen nur aus der leeren Menge $\emptyset$ zusammen mit einer sehr einfachen Mengenoperation definieren. Sei

$$0 :=_{\mathbf{def}} \emptyset,\ 1 :=_{\mathbf{def}} \{\emptyset\} = \{0\},\ 2 :=_{\mathbf{def}} \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\}, \ldots$$

Jede natürliche Zahl ist also genau die Menge ihrer Vorgänger. Wir können diese Konstruktion fortsetzen und die folgenden Mengen definieren:

$$\begin{array}{l}
\omega :=_{\mathbf{def}} \{0, 1, 2, \ldots, \mathbf{n}, \ldots,\} \\
\omega + 1 :=_{\mathbf{def}} \omega \cup \{\omega\},\ \omega + 2, \ldots, \omega + \mathbf{n}, \ldots, \omega + \omega \ {}_{\mathbf{def}}{=:}\, \omega 2 \\
\omega 2 + 1, \ldots, \omega 2 + \mathbf{n}, \ldots, \omega 3, \ldots, \omega 4, \ldots, \omega\omega \ {}_{\mathbf{def}}{=:}\, \omega^2 \\
\omega^3, \ldots, \omega^{\mathbf{n}}, \ldots, \omega^{\omega}, \ldots, \\
\omega^{\omega^{\omega}}, \ldots, \omega^{\omega^{\cdots^{\omega}}} \}\, \mathbf{n}\text{-mal}, \ldots, \omega^{\omega^{\cdots^{\omega}}} \}\, \omega\text{-mal} \ {}_{\mathbf{def}}{=:}\, \epsilon_0
\end{array}$$

Diese Mengen bezeichnet man auch als *Ordinalzahlen*. Sie haben die folgenden beiden Eigenschaften, die man leicht verifiziert:

Definition 1.3.7 (Ordinalzahl)
Eine Menge $\mathbf{X}$ *heißt* **transitiv**, *falls* $\forall \mathbf{y} : \mathbf{y} \in \mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{y} \subseteq \mathbf{X}$.
Eine Menge $\mathbf{X}$ *heißt* **Ordinalzahl**, *falls* $\mathbf{X}$ *transitiv ist und* $(\mathbf{X}, \subseteq)$ *zusammenhängend.*
Wir bezeichnen die Menge[1] *aller Ordinalzahlen mit Ord.*

Man beachte, daß man sich die oben eingeführten Wohlordnungen auch als gewisse Ordnungen auf den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ klar machen kann. Als Mengen gesehen sind ω und $\mathbb{N}$ natürlich identisch. Wenn wir aber ω (oder die anderen oben eingeführten Mengen) benutzen, dann meinen wir immer diese Mengen *zusammen mit ihrer natürlichen Ordnung* $\subseteq$, also eigentlich $(\omega, \subseteq)$, $(\omega + 1, \subseteq)$ etc. Analog bezeichnen wir mit $(\mathbb{N}, \leq)$ die natürlichen Zahlen mit ihrer natürlichen Ordnung. Man kann auf $\mathbb{N}$ aber auch andere Ordnungen definieren, z.B. $(\mathbb{N}, \leq_1)$ mit

$$\mathbf{i} \leq_1 \mathbf{j} \ :\Longleftrightarrow_{\mathbf{def}} \begin{cases} \text{1. Fall: } \mathbf{i} \text{ gerade und } \mathbf{j} \text{ ungerade} \\ \text{2. Fall: } \mathbf{i} \text{ gerade und } \mathbf{j} \text{ gerade und } \mathbf{i} \leq \mathbf{j} \\ \text{3. Fall: } \mathbf{i} \text{ ungerade, } \mathbf{j} \text{ ungerade und } \mathbf{i} \leq \mathbf{j} \end{cases}$$

[1]Eigentlich müsste man hier von einer *Klasse* sprechen. Da wir aber keine axiomatische Mengenlehre zugrunde legen, wollen wir diese Unterscheidung hier nicht machen.

oder $(\mathbb{N}, \leq_2)$ mit

$$\mathbf{i} \leq_2 \mathbf{j} \quad :\Longleftrightarrow_{\mathbf{def}} \begin{cases} \text{1. Fall: } \mathbf{j} = 17 \\ \text{2. Fall: } \mathbf{i} \neq 17 \neq \mathbf{j} \text{ und } \mathbf{i} \leq \mathbf{j} \end{cases}$$

Man sieht leicht, daß $(\mathbb{N}, \leq_1)$ ordnungsisomorph zu $\omega + \omega$ und $(\mathbb{N}, \leq_2)$ ordnungsisomorph zu $\omega + 1$ ist:

$$(\mathbb{N}, \leq_1) \cong (\omega + \omega, \subseteq), \quad (\mathbb{N}, \leq_2) \cong (\omega + 1, \subseteq).$$

Dies ist kein Zufall; tatsächlich läßt sich jede Wohlordnung als eine Ordinalzahl darstellen:

Theorem 1.3.8 (Eigenschaften von Ordinalzahlen)
Es gelten folgende Aussagen:

1. *Für jede Ordinalzahl α ist $(\alpha, \subseteq)$ eine Wohlordnung.*
2. *Für jede Ordinalzahl α gilt: $\alpha = \{\beta : \beta \subset \alpha$ und β ist Ordinalzahl$\}$.*
3. *Zu jeder Wohlordnung $(\mathbf{X}, \preceq)$ gibt es eine eindeutig bestimmte Ordinalzahl α so, daß $(\mathbf{X}, \preceq) \cong (\alpha, \subseteq)$. α heißt der Wohlordnungstypus von $(\mathbf{X}, \preceq)$.*
4. *Eine Ordinalzahl α ist entweder Nachfolger, d.h. α hat die Form $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$ (man schreibt für $\beta \cup \{\beta\}$ auch $\mathbf{succ}(\beta)$ oder $\beta + 1$) oder ist Limeszahl (hat keinen direkten Vorgänger, wie z.B. ω).*

Wir schreiben auch $\alpha \leq \beta$ ($\alpha < \beta$) für $\alpha \subseteq \beta$ ($\alpha \subset \beta$).

Theorem 1.3.9 (Transfinite Induktion)
Sei $\mathcal{P}$ eine Eigenschaft die auf Ordinalzahlen zutreffen kann oder nicht und sei $\alpha > 0$.
Falls:

1. *$\mathcal{P}(0)$ und*
2. *$\forall \beta < \alpha : \ (\beta + 1 < \alpha \wedge \mathcal{P}(\beta)) \implies \mathcal{P}(\beta + 1)$ und*
3. *$\forall \lambda < \alpha : \ (\lambda$ ist Limeszahl $\wedge\ \forall \zeta < \lambda : \mathcal{P}(\zeta)) \implies \mathcal{P}(\lambda)$,*

so gilt auch

$$\forall \zeta < \alpha : \mathcal{P}(\zeta)$$

Theorem 1.3.10 (Definition durch transfinite Induktion)
Sei $\mathbf{X}$ eine Menge und seien $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$, $\mathbf{f} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ und $\mathbf{F} : Pot(\mathbf{X}) \to \mathbf{X}$ vorgegeben. Dann gibt es für jede Ordinalzahl α eine eindeutig bestimmte Funktion $\mathbf{G} : \alpha \to \mathbf{X}$ mit:

1. *$\mathbf{G}(0) = \mathbf{a}$,*
2. *$\forall \beta < \alpha$ mit $\beta + 1 < \alpha : \ \mathbf{G}(\beta + 1) = \mathbf{f}(\mathbf{G}(\beta))$*

3. *$\forall\lambda$ mit: λ ist Limeszahl und $0 < \lambda < \alpha$:* $\mathbf{G}(\lambda) = \mathbf{F}(\{\mathbf{G}(\zeta) : \zeta < \lambda\})$.

Mithilfe des letzten Theorems kann man sehr leicht die Addition und die Multiplikation von Ordinalzahlen definieren. Die Addition wird rekursiv auf die Funktion **succ** (also Addition von 1 zurückgeführt).

Definition 1.3.11 (Addition von Ordinalzahlen)
*Sei $\beta \in$ **Ord**, **succ** : **Ord** $\to$ **Ord**; $\alpha \mapsto \alpha + 1$ und **supremum** : **Pot(Ord)** $\to$ **Ord**; $\mathcal{X} \mapsto \mathbf{sup}(\mathcal{X})$. Die Anwendung des letzten Theorems ergibt für jede Ordinalzahl η die Existenz einer Funktion $\mathbf{Add}_\beta : \eta \to \mathbf{Ord}$ mit:*

1. $\mathbf{Add}_\beta(0) = \beta$,
2. *Für Nachfolgerzahlen $\leq \eta$:* $\mathbf{Add}_\beta(\alpha + 1) = \mathbf{Add}_\beta(\alpha) + 1$.
3. *Für Limeszahlen $\leq \eta$:* $\mathbf{Add}_\beta(\lambda) = \mathbf{sup}(\{\mathbf{Add}_\beta(\zeta) : \zeta < \lambda\})$.

*Statt $\mathbf{Add}_\beta(\alpha)$ schreiben wir auch $\beta + \alpha$. Da es zu jeder Ordinalzahl eine größere gibt, ist die Funktion $\mathbf{Add}_\beta$ für jedes β auf ganz Ord definiert und man kann daher auch **Add** als Funktion von $\mathbf{Ord} \times \mathbf{Ord}$ nach **Ord** betrachten:* $\mathbf{Add} : \mathbf{Ord} \times \mathbf{Ord} \to \mathbf{Ord}$; $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha + \beta$.

Die Multiplikation wird rekursiv auf die Addition zurückgeführt.

Definition 1.3.12 (Multiplikation von Ordinalzahlen)
*Sei $\beta \in$ **Ord**, $\mathbf{Add}(\cdot, \beta) : \mathbf{Ord} \to \mathbf{Ord}$; $\alpha \mapsto \alpha + \beta$ und **supremum** : **Pot(Ord)** $\to$ **Ord**; $\mathcal{X} \mapsto \mathbf{sup}(\mathcal{X})$. Die Anwendung des letzten Theorems ergibt für jede Ordinalzahl η die Existenz einer Funktion $\mathbf{Mult}_\beta : \eta \to \mathbf{Ord}$ mit:*

1. $\mathbf{Mult}_\beta(0) = 0$,
2. *Für Nachfolgerzahlen $\leq \eta$:* $\mathbf{Mult}_\beta(\alpha+1) = \mathbf{Add}(\mathbf{Mult}_\beta(\alpha), \beta) = \mathbf{Mult}_\beta(\alpha) + \beta$.
3. *Für Limeszahlen $\leq \eta$:* $\mathbf{Mult}_\beta(\lambda) = \mathbf{sup}(\{\mathbf{Mult}_\beta(\zeta) : \zeta < \lambda\})$.

*Statt $\mathbf{Mult}_\beta(\alpha)$ schreiben wir auch $\beta \cdot \alpha$. Da es zu jeder Ordinalzahl eine größere gibt, ist die Funktion $\mathbf{Mult}_\beta$ für jedes β auf ganz Ord definiert und man kann daher auch **Mult** als Funktion von $\mathbf{Ord} \times \mathbf{Ord}$ nach **Ord** betrachten:* $\mathbf{Mult} : \mathbf{Ord} \times \mathbf{Ord} \to \mathbf{Ord}$; $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \cdot \beta$.

Beide Begriffe sind nur auf Ordinalzahlen nicht aber auf beliebigen Wohlordnungen definiert. Oft kann man sich aber die Addition und Multiplikation von Ordinalzahlen besser vorstellen, wenn man sie konstruktiv auf bekannten Mengen definiert. Dies tun wir mit den nächsten beiden Definitionen.

Definition 1.3.13 (Addition von Wohlordnungen: $(\mathbf{X}, \preceq) \oplus (\mathbf{X}', \preceq')$)
Seien $(\mathbf{X}, \preceq)$ und $(\mathbf{X}', \preceq')$ Wohlordnungen. Wir definieren eine Wohlordnung $\preceq_{\mathbf{neu}}$ auf der Menge $\mathbf{X} \cup \mathbf{X}'$ durch

$$\mathbf{y}_1 \preceq_{\mathbf{neu}} \mathbf{y}_2 \quad :\Longleftrightarrow_{\mathbf{def}} \begin{cases} \text{1. Fall: } \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbf{X} \text{ und } \mathbf{y}_1 \preceq \mathbf{y}_2 \\ \text{2. Fall: } \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbf{X}' \text{ und } \mathbf{y}_1 \preceq' \mathbf{y}_2 \\ \text{3. Fall: } \mathbf{y}_1 \in \mathbf{X},\ \mathbf{y}_2 \in \mathbf{X}' \end{cases}$$

Wir bezeichnen $(\mathbf{X} \cup \mathbf{X}', \preceq_{\mathbf{neu}})$ *als ordinale Summe von* $(\mathbf{X}, \preceq)$ *und* $(\mathbf{X}', \preceq')$ *und schreiben dafür* $(\mathbf{X}, \preceq) \oplus (\mathbf{X}', \preceq')$.

Intuitiv setzt man also beide Wohlordnungen disjunkt hintereinander.

Definition 1.3.14 (Multiplikation von Wohlordnungen: $(\mathbf{X}, \preceq) \odot (\mathbf{X}', \preceq')$**)**
Seien $(\mathbf{X}, \preceq)$ *und* $(\mathbf{X}', \preceq')$ *Wohlordnungen. Wir definieren eine Wohlordnung* $\preceq_{\mathbf{neu}}$ *auf dem kartesischen Produkt* $\mathbf{X} \times \mathbf{X}'$ *durch*

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) \preceq_{\mathbf{neu}} (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) \;\; :\Longleftrightarrow_{\mathbf{def}} \begin{cases} \text{1. Fall: } \mathbf{y}_1 \neq \mathbf{y}_2 \text{ und } \mathbf{y}_1 \preceq' \mathbf{y}_2 \\ \text{2. Fall: } \mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_2 \text{ und } \mathbf{x}_1 \preceq \mathbf{x}_2 \end{cases}$$

Wir bezeichnen $(\mathbf{X} \times \mathbf{X}', \preceq_{\mathbf{neu}})$ *als ordinales Produkt von* $(\mathbf{X}, \preceq)$ *und* $(\mathbf{X}', \preceq')$ *und schreiben dafür* $(\mathbf{X}, \preceq) \odot (\mathbf{X}', \preceq')$.

Intuitiv bedeutet das ordinale Produkt gerade die antilexikographische Ordnung.
Es gilt folgender Zusammenhang

- $(\alpha \cdot \beta, \subseteq) \cong (\alpha, \subseteq) \odot (\beta, \subseteq)$ und
- $(\alpha + \beta, \subseteq) \cong (\alpha, \subseteq) \oplus (\beta, \subseteq)$.

Damit kann man sich in vielen Fällen einige nützliche Identitäten klarmachen.

Beispiel 1.3.15 (+ ist nicht kommutativ)
Sei $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$. *Man betrachte etwa* $\mathbf{n} + \omega$. *Dies ist dasselbe wie* $(\mathbf{n}, \leq) \oplus (\mathbb{N}, \leq)$, *was aber offensichtlich ordnungsisomorph zu* $(\mathbb{N}, \leq)$, *also* ω *ist. Was ergibt sich nun für* $\omega + \mathbf{n}$? $(\mathbb{N}, \leq) \oplus (\mathbf{n}, \leq)$ *ist offensichtlich nicht ordnungsisomorph zu* ω, *also*

$$\mathbf{n} + \omega < \omega + \mathbf{n}.$$

Man zeigt leicht, daß die Multiplikation kommutativ und assoziativ ist. Außerdem ist $\omega + \omega = \omega \cdot 2$. Was ergibt aber $2 \cdot \omega$? Wir erhalten durch Einsetzen in die Definition der Multiplikation

$$2 \cdot \omega = \mathbf{Mult}_2(\omega) = \mathbf{sup}(\{\mathbf{Mult}_2(\zeta) : \zeta < \omega\}) = \mathbf{sup}(\{0, 2, 4, 6, 8 \ldots\}) = \omega,$$

also gilt

$$2 \cdot \omega < \omega + \omega.$$

Gilt die Distributivität? Gilt insbesondere

$$\omega \cdot (\omega + \omega) \; = \; (\omega + \omega) \cdot \omega \; ?$$

Der erste Teil der Gleichung vereinfacht sich zu $\omega \cdot (\omega \cdot 2)$ also zu $\omega^2 \cdot 2$. Für den zweiten Teil ergibt sich $(\omega + \omega) \cdot \omega \; = \; (\omega \cdot 2) \cdot \omega \; = \; \omega \cdot (2 \cdot \omega) \; = \; \omega \cdot \omega \; = \; \omega^2$. Es gilt also

$$\omega \cdot (\omega + \omega) \; > \; (\omega + \omega) \cdot \omega.$$

Es gilt nämlich die Links-Distributivität, nicht aber die Rechts-Distributivität.

1.3.3 Operatoren und Fixpunkte

Definition 1.3.16 (Typen von Operatoren)
Ein Operator *auf* $\mathbf{X}$ *ist eine Abbildung* $\mathcal{F} : Pot(\mathbf{X}) \to Pot(\mathbf{X})$.
$\mathcal{F}$ *heißt*

1. **monoton**, *falls* $\forall \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \subseteq \mathbf{X} : \mathbf{X}_1 \subseteq \mathbf{X}_2 \Rightarrow \mathcal{F}(\mathbf{X}_1) \subseteq \mathcal{F}(\mathbf{X}_2)$,
2. **antimonoton**, *falls* $\forall \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \subseteq \mathcal{X} : \mathbf{X}_1 \subseteq \mathbf{X}_2 \Rightarrow \mathcal{F}(\mathbf{X}_2) \subseteq \mathcal{F}(\mathbf{X}_1)$,
3. **kompakt**, *falls* $\forall \mathbf{X}_1 \subseteq \mathbf{X}$ *gilt*

$$\mathcal{F}(\mathbf{X}_1) = \bigcup \{\mathcal{F}(\mathbf{X}_2) : \mathbf{X}_2 \subseteq \mathbf{X}_1 \ \wedge \ \mathbf{X}_2 \textit{ ist endlich}\}.$$

Definition 1.3.17 (Fixpunkt, Fast-Fixpunkt)
$\mathbf{Y} \subseteq \mathbf{X}$ *heißt* Fixpunkt *(bzw.* Fast-Fixpunkt*) für* $\mathcal{F} : Pot(\mathbf{X}) \to Pot(\mathbf{X})$, *falls* $\mathcal{F}(\mathbf{Y}) = \mathbf{Y}$ *(bzw.* $\mathcal{F}(\mathbf{Y}) \subseteq \mathbf{Y}$*).*

Beispiel 1.3.18
Sei $\mathcal{F} : Pot(\mathbb{N}) \to Pot(\mathbb{N})$; $\mathbf{Y} \mapsto \{2^{\mathbf{y}} : \mathbf{y} \in \mathbf{Y}\}$. $\mathcal{F}$ *ist monoton und kompakt.* $\emptyset$ *ist der einzige Fixpunkt.*

Definition 1.3.19 ($\mathcal{F}\uparrow^{\alpha}, \mathcal{F}\downarrow^{\alpha}$)
Sei $\mathcal{F} : Pot(\mathbf{X}) \to Pot(\mathbf{X})$ *ein Operator auf* $\mathbf{X}$ *und* $\mathbf{Y} \subseteq \mathbf{X}$.

1. *Wir definieren* $\mathcal{F}\uparrow^{\alpha}$ *durch:*

$$\begin{array}{lll} \mathcal{F}\uparrow^{0}(\mathbf{Y}) & :=_{\mathbf{def}} & \mathbf{Y}, \\ \mathcal{F}\uparrow^{\alpha+1}(\mathbf{Y}) & :=_{\mathbf{def}} & \mathcal{F}(\mathcal{F}\uparrow^{\alpha}(\mathbf{Y})), \\ \mathcal{F}\uparrow^{\lambda}(\mathbf{Y}) & :=_{\mathbf{def}} & \bigcup\{\mathcal{F}\uparrow^{\alpha}(\mathbf{Y}) : \alpha < \lambda\}. \end{array}$$

2. *Wir definieren* $\mathcal{F}\downarrow^{\alpha}$ *durch:*

$$\begin{array}{lll} \mathcal{F}\downarrow^{0}(\mathbf{Y}) & :=_{\mathbf{def}} & \mathbf{Y}, \\ \mathcal{F}\downarrow^{\alpha+1}(\mathbf{Y}) & :=_{\mathbf{def}} & \mathcal{F}(\mathcal{F}\downarrow^{\alpha}(\mathbf{Y})), \\ \mathcal{F}\downarrow^{\lambda}(\mathbf{Y}) & :=_{\mathbf{def}} & \bigcap\{\mathcal{F}\downarrow^{\alpha}(\mathbf{Y}) : \alpha < \lambda\}. \end{array}$$

Theorem 1.3.20 (Knaster-Tarski)
Sei $\mathcal{F} : Pot(\mathbf{X}) \to Pot(\mathbf{X})$ *ein monotoner Operator.*

1. $\mathcal{F}$ *besitzt einen kleinsten Fixpunkt. Dieser Fixpunkt hat die Form* $\mathcal{F}\uparrow^{\alpha}(\emptyset)$ *für eine Ordinalzahl* α.
2. *Ist* $\mathcal{F}$ *zusätzlich noch kompakt, so wird der Fixpunkt in höchstens* ω*-vielen Iterationen erreicht:* $\mathbf{F}\uparrow^{\omega}(\emptyset)$.
3. $\mathcal{F}$ *besitzt einen größten Fixpunkt. Dieser hat die Form* $\mathbf{F}\downarrow^{\alpha}(\emptyset)$ *für ein* α. *Selbst wenn* $\mathcal{F}$ *kompakt ist, kann* $\alpha > \omega$ *sein.*

Eine Variante des letzten Satzes werden wir im nächsten Kapitel brauchen. Es handelt sich hierbei um die Existenz von Fixpunkten für *progressive* Operatoren. Das sind solche für die gilt:

$$\text{Progressivität: } \forall \mathbf{Y} \subseteq \mathbf{X} : \mathbf{Y} \subseteq \mathcal{F}(\mathbf{Y}).$$

Korollar 1.3.21 (Variante des Satzes von Knaster-Tarski)
Sei $\mathcal{F} : Pot(\mathbf{X}) \rightarrow Pot(\mathbf{X})$ ein monotoner und progressiver Operator. Dann gibt es für jede Menge $\mathbf{Y} \subseteq \mathbf{X}$ eine kleinste Menge $\mathbf{Z}$ mit:

- $\mathbf{Y} \subseteq \mathbf{Z}$,
- $\mathcal{F}(\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$.

Falls $\mathcal{F}$ kompakt ist, so gilt: $\mathbf{Z} = \mathcal{F} \uparrow^{\omega} (\mathbf{Y})$.

1.4 Beispiele

Wir listen im folgenden einige Beispiele auf, die typische nichtmonotone Phänomene beschreiben.

Beispiel 1.4.1 (Ausnahmen)
Folgende Fakten sind bekannt:

1. *Vögel fliegen normalerweise.*
2. *Ausnahmen sind Pinguine, sie fliegen nicht.*
3. *Tweety ist ein Vogel.*

Intuitiv möchten wir natürlich ableiten, daß Tweety fliegt. Nach einiger Zeit lernen wir aber: Tweety ist ein Pinguin. Frage: Fliegt Tweety immer noch? *Intuitiv erwarten wir: Nein.*

Beispiel 1.4.2 (Nixon-Diamant)
Folgende Fakten sind bekannt:

1. *Quäker sind normalerweise Pazifisten.*
2. *Republikaner sind normalerweise keine Pazifisten.*
3. *Nixon war sowohl Quäker als auch Republikaner.*

Frage: War Nixon ein Pazifist? *Wir erwarten hier, daß wir keine eindeutige Aussage treffen können.*

Beispiel 1.4.3 (Disjunktion)
Wir haben zwei Defaults und ein Faktum.

1. *Normalerweise trinken Italiener gerne Wein, Franzosen auch.*

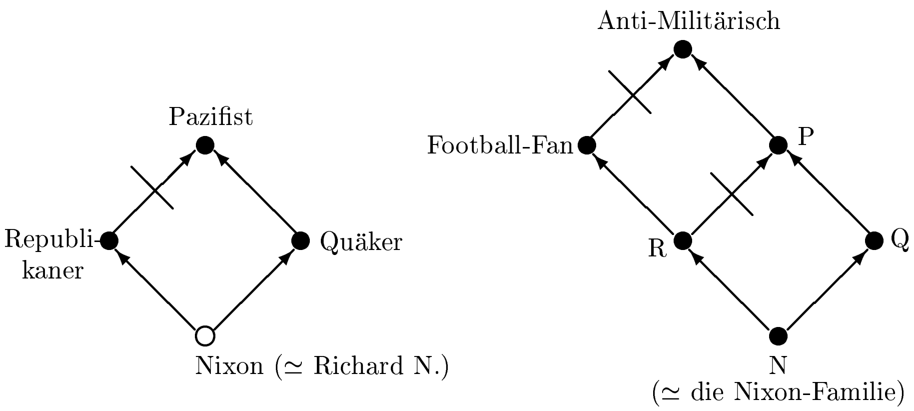

Abbildung 1.1: "Nixon-Diamant" und "Doppelter-Diamant"

2. *Georg ist Franzose oder Italiener.*

Frage: Trinkt Georg gerne Wein? *Hier erwarten wir die Antwort* Ja.

Beispiel 1.4.4 (Disjunktion mit Blockade)
Wir haben hier zwei Defaults und ein Faktum.

1. *Ein Arm ist normalerweise benutzbar.*
2. *Ein gebrochener Arm ist normalerweise eine Ausnahme zu 1.*
3. *Wir wissen, daß Peter den rechten oder den linken Arm gebrochen hat.*

Frage: Sind beide Arme benutzbar? *Hier erwarten wir die Antwort* Nein, *obwohl wir nicht wissen können, welcher Arm gebrochen ist.*

1.5 Zwei erste Ansätze

Definition 1.5.1 (CWA)
Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathbf{At}$ eine Teilmenge der Menge der Atome der zugrundeliegenden Sprache $\mathcal{L}$ (also aussagenlogische Konstanten), $\mathbf{W}$ eine Menge von Sätzen, die Elemente aus $\mathcal{A}$ enthalten. Dann definieren wir die bezüglich $\mathcal{A}$ abgeschlossene Welt von $\mathbf{W}$ durch die folgende Formelmenge[2]

$$\mathbf{CWA}^{\mathcal{A}}(\mathbf{W}) :=_{\mathbf{def}} \mathbf{Cn}(\mathbf{W} \cup \{\neg \mathbf{a} : \mathbf{a} \in \mathcal{A} \wedge \mathbf{W} \not\vdash \mathbf{a}\}).$$

[2] Mit $\mathbf{Cn}(\mathbf{T})$ bezeichnen wir den deduktiven Abschluß von $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{Fml}_{\mathcal{L}}$, also die Menge aller Folgerungen von $\mathbf{T}$ in der jeweils betrachteten Logik.

Wir zeichnen also zunächst eine Menge $\mathcal{A}$ von Aussagen aus. Dann nehmen wir zu unserem sicheren Wissen $\mathbf{W}$ die Negate $\neg\mathbf{a}$ all jener Aussagen $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$ hinzu, die nicht aus $\mathbf{W}$ ableitbar sind. Diese neue Menge schließen wir dann noch deduktiv ab. Denken wir an unser Fahrplan-Beispiel zurück, so bedeutet dies, daß wir $\neg\mathbf{flug}(\mathbf{M}, \mathbf{B}, 11.00)$ explizit zu unserer Menge hinzunehmen.

Eine andere Möglichkeit besteht darin, maximal konsistente Teilmengen zu betrachten:

Definition 1.5.2 (Maximal konsistente Teilmengen)
Gegeben sei $(\mathbf{D}, \mathbf{W})$*, wobei* $\mathbf{D}$ *(Defaults) und* $\mathbf{W}$ *(Fakten) beides Mengen von Sätzen sind. Eine Formelmenge* $\mathcal{E}$ *heißt Abschluß von* $(\mathbf{D}, \mathbf{W})$*, falls*

$$\mathcal{E} = \mathbf{Cn}(\mathbf{W} \cup \mathbf{D}_0)$$

wobei $\mathbf{D}_0 \subseteq \mathbf{D}$ *maximal unter allen* $\mathbf{D}' \subseteq \mathbf{D}$ *so ist, daß* $\mathbf{W} \cup \mathbf{D}'$ *konsistent ist.*

Hier betrachten wir also die verschiedenen Möglichkeiten, eine Theorie $\mathbf{W}$ maximal um Sätze aus $\mathbf{D}$ zu erweitern ohne inkonsistent zu werden.

1.6 Formalisierung der Beispiele

Für Beispiel 1.4.1 erhalten wir folgende Formalisierung:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{T}_1 :=_{\mathbf{def}} & \{ & \mathbf{vogel}(\mathbf{x}) \wedge \neg\mathbf{ab}_1(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{fliegt}(\mathbf{x}), \\ & & \mathbf{pinguin}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{ab}_1(\mathbf{x}), \\ & & \mathbf{pinguin}(\mathbf{x}) \wedge \neg\mathbf{ab}_2(\mathbf{x}) \rightarrow \neg\mathbf{fliegt}(\mathbf{x}), \\ & & \mathbf{vogel}(\mathbf{tweety}) \ \} \\ & & \\ \mathbf{T}_2 :=_{\mathbf{def}} \mathbf{T}_1 \cup & \{ & \mathbf{pinguin}(\mathbf{tweety}) \ \} \end{array}$$

Mit $\mathcal{A} :=_{\mathbf{def}} \{\mathbf{ab}_1(\mathbf{tweety}), \mathbf{ab}_2(\mathbf{tweety})\}$ ergibt sich

$$\mathbf{CWA}^{\mathcal{A}}(\mathbf{T}_1) = \mathbf{Cn}(\mathbf{T}_1 \cup \{\neg\mathbf{ab}_1(\mathbf{tweety}), \neg\mathbf{ab}_2(\mathbf{tweety})\} \models \mathbf{fliegt}(\mathbf{tweety})$$

und

$$\mathbf{CWA}^{\mathcal{A}}(\mathbf{T}_2) = \mathbf{Cn}(\mathbf{T}_2 \cup \{\neg\mathbf{ab}_2(\mathbf{tweety})\} \models \neg\mathbf{fliegt}(\mathbf{tweety}),$$

also die gewünschten Ergebnisse. Der maximal konsistente Teilmengen-Ansatz liefert dasselbe. Für $\mathbf{T}_1$ ergibt sich als $\mathcal{E}_1$ genau $\mathbf{CWA}^{\mathcal{A}}(\mathbf{T}_1)$ und für $\mathbf{T}_2$ ergibt sich ebenfalls $\mathbf{CWA}^{\mathcal{A}}(\mathbf{T}_2)$ als einziger Abschluß.

Für Beispiel 1.4.2 ergibt sich als Formalisierung:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{T} :=_{\mathbf{def}} & \{ & \mathbf{r}(\mathbf{x}) \wedge \neg\mathbf{ab}_1(\mathbf{x}) \rightarrow \neg\mathbf{p}(\mathbf{x}), \\ & & \mathbf{q}(\mathbf{x}) \wedge \neg\mathbf{ab}_2(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{p}(\mathbf{x}), \\ & & \mathbf{r}(\mathbf{nixon}) \wedge \mathbf{q}(\mathbf{nixon}) \ \} \end{array}$$

Wir erhalten mit $\mathcal{A} :=_{\mathbf{def}} \{\mathbf{ab}_1(\mathbf{nixon}), \mathbf{ab}_2(\mathbf{nixon})\}$

$$\mathbf{CWA}^{\mathcal{A}}(\mathbf{T}) = \mathbf{Cn}(\mathbf{T} \cup \{\neg\mathbf{ab}_1(\mathbf{nixon}), \neg\mathbf{ab}_2(\mathbf{nixon})\} \models \Box,$$

es sind also alle Formeln ableitbar, da die gebildete Menge inkonsistent ist. Der CWA-Ansatz erweist sich also hier als zu stark. Wählen wir den maximal-konsistenten Teilmengen-Ansatz und setzen

$$\mathbf{D} :=_{\mathbf{def}} \{\neg\mathbf{ab}_1(\mathbf{nixon}),\ \neg\mathbf{ab}_2(\mathbf{nixon})\},\ \ \mathbf{W} :=_{\mathbf{def}} \mathbf{T},$$

so sind für $\mathbf{D}_1 :=_{\mathbf{def}} \{\neg\mathbf{ab}_1(\mathbf{nixon})\}$ und $\mathbf{D}_2 :=_{\mathbf{def}} \{\neg\mathbf{ab}_2(\mathbf{nixon})\}$ jeweils

$$\mathbf{Cn}(\mathbf{W} \cup \mathbf{D}_1),\ \text{bzw. } \mathbf{Cn}(\mathbf{W} \cup \mathbf{D}_2)$$

maximal konsistente Mengen. In einer ist Nixon Pazifist, in der anderen nicht. Betrachten wir die Aussagen, die in beiden Mengen gelten, so erhalten wir unsere Ausgangsmenge zurück und können nichts darüber aussagen, ob Nixon Pazifist war oder nicht. Dieser Ansatz gibt uns also die gewünschten Ergebnisse.[3]

Die Formalisierung des Beispiels 1.4.3 ist ähnlich zu der von Beispiel 1.4.2:

$$\mathbf{T} :=_{\mathbf{def}} \{ \begin{array}{l} \mathbf{italiener}(\mathbf{x}) \wedge \neg\mathbf{ab}_1(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{weintrinker}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{franzose}(\mathbf{x}) \wedge \neg\mathbf{ab}_2(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{weintrinker}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{italiener}(\mathbf{georg}) \vee \mathbf{franzose}(\mathbf{georg}) \ \ \} \end{array}$$

Wir erhalten mit $\mathcal{A} :=_{\mathbf{def}} \{\mathbf{ab}_1(\mathbf{georg}), \mathbf{ab}_2(\mathbf{georg})\}$

$$\mathbf{CWA}^{\mathcal{A}}(\mathbf{T}) = \mathbf{Cn}(\mathbf{T} \cup \{\neg\mathbf{ab}_1(\mathbf{georg}), \neg\mathbf{ab}_2(\mathbf{georg})\} \ \models \mathbf{weintrinker}(\mathbf{georg}).$$

In diesem Beispiel ergibt sich auch mit dem maximal-konsistenten Teilmengen-Ansatz nur genau ein Abschluß, der mit $\mathbf{CWA}^{\mathcal{A}}(\mathbf{T})$ übereinstimmt.

In Beispiel 1.4.4 versagen allerdings beide Ansätze.

$$\mathbf{T} :=_{\mathbf{def}} \{ \begin{array}{l} \neg\mathbf{ab}_1(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{useable}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{broken}(\mathbf{x}) \wedge \neg\mathbf{ab}_2(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{ab}_1(\mathbf{x}), \\ \mathbf{broken}(\mathbf{left}) \vee \mathbf{broken}(\mathbf{right}) \ \ \} \end{array}$$

Wir erhalten für $\mathcal{A} :=_{\mathbf{def}} \{\mathbf{ab}_1(\mathbf{left}), \mathbf{ab}_1(\mathbf{right}), \mathbf{ab}_2(\mathbf{left}), \mathbf{ab}_2(\mathbf{right})\}$

$$\mathbf{CWA}^{\mathcal{A}}(\mathbf{T}) = \mathbf{Cn}(\mathbf{T} \cup \{\neg\mathbf{ab}_1(\mathbf{left}), \neg\mathbf{ab}_1(\mathbf{right}), \neg\mathbf{ab}_2(\mathbf{left}), \neg\mathbf{ab}_2(\mathbf{right})] \ \models \Box,$$

also wieder eine inkonsistente Menge!

Der konsistente Teilmengen-Ansatz mit

$$\mathcal{D} :=_{\mathbf{def}} \{\neg\mathbf{ab}_1(\mathbf{left}), \neg\mathbf{ab}_1(\mathbf{right}), \neg\mathbf{ab}_2(\mathbf{left}), \neg\mathbf{ab}_2(\mathbf{right})\}$$

liefert vier Abschlüsse:

1. Im ersten, $\mathcal{E}_1$ bezüglich $\mathbf{D}_1 :=_{\mathbf{def}} \{\neg\mathbf{ab}_2(\mathbf{left}),\ \neg\mathbf{ab}_2(\mathbf{right}),\ \neg\mathbf{ab}_1(\mathbf{right})\}$ gilt: $\mathbf{ab}_1(\mathbf{left})$, $\mathbf{broken}(\mathbf{left})$, $\mathbf{useable}(\mathbf{right})$.

2. Im zweiten, $\mathcal{E}_2$ bezüglich $\mathbf{D}_2 :=_{\mathbf{def}} \{\neg\mathbf{ab}_2(\mathbf{left}),\ \neg\mathbf{ab}_2(\mathbf{right}),\ \neg\mathbf{ab}_1(\mathbf{left})\}$ gilt: $\mathbf{ab}_1(\mathbf{right})$, $\mathbf{broken}(\mathbf{right})$, $\mathbf{useable}(\mathbf{left})$.

[3] Man könnte hier auch auf die Formulierung mit $\mathbf{ab}_1, \mathbf{ab}_2$ verzichten und nur $\mathbf{r}(\mathbf{nixon})$, $\mathbf{q}(\mathbf{nixon})$ als Defaults betrachten.

3. Im dritten, $\mathcal{E}_3$ bezüglich $\mathbf{D}_3 :=_{\mathbf{def}} \{\neg\mathbf{ab}_2(\mathbf{left}), \neg\mathbf{ab}_1(\mathbf{right}), \neg\mathbf{ab}_1(\mathbf{left})\}$ gilt: $\mathbf{useable}(\mathbf{left})$, $\mathbf{useable}(\mathbf{right})$, $\mathbf{broken}(\mathbf{left})$ und $\mathbf{ab}_2(\mathbf{right})$.

4. Im vierten, $\mathcal{E}_4$ bezüglich $\mathbf{D}_4 :=_{\mathbf{def}} \{\neg\mathbf{ab}_2(\mathbf{right}), \neg\mathbf{ab}_1(\mathbf{right}), \neg\mathbf{ab}_1(\mathbf{left})\}$ gilt:
$\mathbf{useable}(\mathbf{left})$, $\mathbf{useable}(\mathbf{right})$, $\mathbf{broken}(\mathbf{right})$ und $\mathbf{ab}_2(\mathbf{left})$.

In den letzten beiden Abschlüssen sind also beide Arme benutzbar — was natürlich völlig unserer Intuition widerspricht. Dieser Ansatz liefert uns also zwei überflüssige Abschlüsse und ist daher zu schwach. Man beachte, daß der Schnitt der letzten beiden Formelmengen $\mathcal{E}_3$ und $\mathcal{E}_4$ genau der Menge

$$\mathbf{CWA}^{\{\neg\mathbf{ab}_1(\mathbf{left}),\neg\mathbf{ab}_1(\mathbf{right})\}}(\mathbf{T})$$

entspricht. Auch aus dieser Menge ist $\mathbf{useable}(\mathbf{left}) \wedge \mathbf{useable}(\mathbf{right})$ ableitbar.

In den nächsten beiden Kapiteln werden wir bessere nichtmonotone Logiken vorstellen.

Kapitel 2

Default Logik (DL)

Wir geben zunächst in Abschnitt 2.1 eine kurze Einführung in die Aussagenlogik. In Abschnitt 2.2 motivieren wir die Syntax der Default-Logik — es tritt hier eine neue Art von Inferenzregeln auf. Abschnitt 2.3 stellt die allgemeine Default-Theorie vor. In Abschnitt 2.4 betrachten wir eine interessante Teilmenge der Default-Logik — sie zeichnet sich dadurch aus, daß die Defaults eine bestimmte Form haben. Schließlich zeigen wir in Abschnitt 2.5, daß die CWA (eingeführt in Kapitel 1) sehr einfach in der Default-Logik simuliert werden kann. Auch der Ansatz von Poole, eine Verallgemeinerung des maximal konsistenten Teilmengen-Ansatzes aus Kapitel 1, ergibt sich als Spezialfall der Defaultlogik. Daß auch diese Logik nicht das abschließende und allumfassende nichtmonotone System darstellt, diskutieren wir in Abschnitt 2.6. Dort weisen wir auf einige Probleme und Unzulänglichkeiten hin.

Die Darstellung der Default Logik in diesem Kapitel lehnt sich sehr stark an [MT93] (siehe auch [Dix94]) an. Andere Darstellungen sind in [Bre91] und [Bes88] enthalten. Eine überblicksartige Darstellung auch neuester Resultate im nicht-monotonen Schließen gibt [BDK95].

2.1 Syntax und Semantik der Aussagenlogik

Definition 2.1.1 (Aussagenlogik $\mathcal{L}_{\mathbf{AL}}$, Sprache $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{AL}}$)
Die Sprache $\mathcal{L}_{\mathbf{AL}}$ der Aussagenlogik besteht aus

- $\Box$ *und* $\top$*: dem falsum und dem verum,*
- $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots \mathbf{x_n}, \ldots$*: einer abzählbaren Menge $\mathcal{AT}$ von AL- Konstanten,*
- $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$*: den Junktoren ($\neg$ ist einstellig, alle anderen zweistellig),*
- (,)*: den Klammern, die der eindeutigen Lesbarkeit dienen.*

Üblicherweise betrachten wir nur eine endliche Menge von aussagenlogischen Konstanten. Allgemein legt eine Teilmenge von $\mathcal{AT}$ eine Sprache $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{AL}}$ fest. Daraus ergibt sich induktiv in natürlicher Weise die Menge aller $\mathcal{L}$-Formeln $\mathbf{Fml}_{\mathcal{L}}$.

Definition 2.1.2 (Semantik, Bewertung, Modell)
Eine Bewertung $\mathbf{v}$ *für eine Sprache* $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{AL}}$ *ist eine Abbildung auf der Menge der durch* $\mathcal{L}$ *festgelegten aussagenlogischen Konstanten und* $\{\top, \Box\}$ *in die Menge* $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$ *mit* $\mathbf{v}(\Box) = \mathbf{f}$, $\mathbf{v}(\top) = \mathbf{t}$.

Jede Bewertung $\mathbf{v}$ *kann zu einer eindeutigen Funktion* $\bar{\mathbf{v}} : \mathbf{Fml}_{\mathcal{L}} \to \{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$ *so fortgesetzt werden, daß gilt:*

- $\bar{\mathbf{v}}(\neg\mathbf{p}) = \begin{cases} \mathbf{t}, & \textit{falls } \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{p}) = \mathbf{f}, \\ \mathbf{f}, & \textit{falls } \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{p}) = \mathbf{t}. \end{cases}$
- $\bar{\mathbf{v}}(\varphi \wedge \gamma) = \begin{cases} \mathbf{t}, & \textit{falls } \bar{\mathbf{v}}(\varphi) = \mathbf{t} \textit{ und } \bar{\mathbf{v}}(\gamma) = \mathbf{t}, \\ \mathbf{f}, & \textit{sonst.} \end{cases}$
- $\bar{\mathbf{v}}(\varphi \vee \gamma) = \begin{cases} \mathbf{t}, & \textit{falls } \bar{\mathbf{v}}(\varphi) = \mathbf{t} \textit{ oder } \bar{\mathbf{v}}(\gamma) = \mathbf{t}, \\ \mathbf{f}, & \textit{sonst.} \end{cases}$
- $\bar{\mathbf{v}}(\varphi \to \gamma) = \begin{cases} \mathbf{t}, & \textit{falls } \bar{\mathbf{v}}(\varphi) = \mathbf{f} \textit{ oder } (\bar{\mathbf{v}}(\varphi) = \mathbf{t} \textit{ und } \bar{\mathbf{v}}(\gamma) = \mathbf{t}), \\ \mathbf{f}, & \textit{sonst.} \end{cases}$

Eine Bewertung $\mathbf{v}$ *legt daher in eindeutiger Weise ein* $\bar{\mathbf{v}}$ *fest. Wir nennen* $\bar{\mathbf{v}}$ *auch* $\mathcal{L}$*-Struktur oder Modell* $\mathcal{A}_{\mathbf{v}}$*. Ein Modell legt also für jede Formel fest, ob sie wahr ist oder falsch. Im folgenden werden wir sowohl von Modellen als auch von Bewertungen sprechen.*

Definition 2.1.3 (Gültigkeit einer Formel, Tautologie)

1. *Eine Formel* $\varphi \in \mathbf{Fml}_{\mathcal{L}}$ *gilt unter der Belegung* $\mathbf{v}$, *falls* $\bar{\mathbf{v}}(\varphi) = \mathbf{t}$*. Wir schreiben auch* $\bar{\mathbf{v}} \models \varphi$ *oder einfach* $\mathbf{v} \models \varphi$.
2. *Eine Theorie ist eine Menge von Formeln :* $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{Fml}_{\mathcal{L}}$. $\mathbf{v}$ *erfüllt* $\mathbf{T}$ *falls* $\bar{\mathbf{v}}(\varphi) = \mathbf{t}$ *für alle* $\varphi \subseteq \mathbf{T}$*. Wir schreiben* $\mathbf{v} \models \mathbf{T}$.
3. *Eine* $\mathcal{L}$*-Formel* φ *heißt* $\mathcal{L}$*-Tautologie, falls für alle möglichen Bewertungen* $\mathbf{v}$ *auf* $\mathcal{L}$ *gilt:* $\mathbf{v} \models \varphi$.

Im folgenden lassen wir die zugrundeliegende Sprache $\mathcal{L}$ meistens weg, da sie aus dem Zusammenhang klar ersichtlich ist. Trotzdem muß sie natürlich immer festgelegt sein.

Definition 2.1.4 (Folgerungsmenge $\mathbf{Cn}(\mathbf{T})$)
Eine Formel φ *folgt aus* $\mathbf{T}$, *falls für alle Bewertungen* $\mathbf{v}$ *mit* $\mathbf{v} \models \mathbf{T}$ *auch* $\mathbf{v} \models \varphi$ *gilt. Dafür schreiben wir:* $\mathbf{T} \models \varphi$.

Wir bezeichnen mit $\mathbf{Cn}_{\mathcal{L}}(\mathbf{T}) :=_{\mathbf{def}} \{\varphi \in \mathbf{Fml}_{\mathcal{L}} : \mathbf{T} \models \varphi\}$, *oder einfach* $\mathbf{Cn}(\mathbf{T})$, *den semantischen Konsequenzoperator.*

Lemma 2.1.5 (Eigenschaften von $\mathbf{Cn}(\mathbf{T})$)
Der semantische Konsequenzoperator hat folgende Eigenschaften:

1. $\mathbf{T}$-Erweiterung: $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{Cn}(\mathbf{T})$,

2. Monotonie: $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{T}' \Rightarrow \mathbf{Cn}(\mathbf{T}) \subseteq \mathbf{Cn}(\mathbf{T}')$,

3. Abgeschlossenheit: $\mathbf{Cn}(\mathbf{Cn}(\mathbf{T})) = \mathbf{Cn}(\mathbf{T})$.

Lemma 2.1.6 ($\varphi \notin \mathbf{Cn}(\mathbf{T})$)
$\varphi \notin \mathbf{Cn}(\mathbf{T})$ gdw *es gibt eine Bewertung* $\mathbf{v}$ *mit* $\mathbf{v} \models \mathbf{T}$ *und* $\bar{\mathbf{v}}(\varphi) = \mathbf{f}$.

Definition 2.1.7 ($\mathbf{MOD}(\mathbf{T})$, $\mathbf{Cn}(\mathcal{U})$)
Ist $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{Fml}_{\mathcal{L}}$*, so bezeichnen wir mit* $MOD(\mathbf{T})$ *die Menge aller* $\mathcal{L}$*-Strukturen* $\mathcal{A}$ *die Modelle von* $\mathbf{T}$ *sind:*

$$MOD(\mathbf{T}) :=_{\mathbf{def}} \{\mathcal{A} : \mathcal{A} \models \mathbf{T}\}.$$

Ist $\mathcal{U}$ *eine Menge von Modellen (also Bewertungen), so können wir alle jene Sätze betrachten, die in allen Modellen gelten. Diese Menge bezeichnen wir ebenfalls mit* $\mathbf{Cn}(\mathcal{U})$*:*

$$\mathbf{Cn}(\mathcal{U}) :=_{\mathbf{def}} \{\varphi \in \mathbf{Fml}_{\mathcal{L}} : \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U} : \bar{\mathbf{v}}(\varphi) = \mathbf{t}\}.$$

Offenbar ist MOD der zu **Cn** duale Begriff:

$$\mathbf{Cn}(\mathrm{MOD}(\mathbf{T})) = \mathbf{Cn}(\mathbf{T}), \quad \mathrm{MOD}(\mathbf{Cn}(\mathbf{T})) = \mathrm{MOD}(\mathbf{T}).$$

Definition 2.1.8 (Vollständigkeit einer Theorie T)
$\mathbf{T}$ *heißt vollständig, falls für jede Formel* $\varphi \in \mathbf{Fml}$*:* $\mathbf{T} \models \varphi$ *oder* $\mathbf{T} \models \neg\varphi$.

Diese letzte Bedingung ist nicht zu verwechseln mit der entsprechenden Eigenschaft einer Bewertung $\mathbf{v}$ bzw. in einem Modell: Jede Bewertung hat natürlich diese Eigenschaft.

Definition 2.1.9 (Konsistenz einer Theorie)
$\mathbf{T}$ *heißt konsistent, falls es eine Bewertung* $\mathbf{v}$ *mit* $\bar{\mathbf{v}}(\varphi) = \mathbf{t}$ *für alle* $\varphi \in \mathbf{T}$ *gibt.*

Lemma 2.1.10 (Ex Falso Quodlibet)
$\mathbf{T}$ *ist konsistent* gdw $\mathbf{Cn}(\mathbf{T}) \neq \mathbf{Fml}_{\mathcal{L}}$.

Definition 2.1.11 (Axiom, Inferenzregel)
Axiome der Aussagenlogik sind die folgenden Formeln:

- $\mathbf{p} \to \top$, $\Box \to \mathbf{p}$, $\neg\top \to \Box$, $\Box \to \neg\top$,
- $(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \to \mathbf{p}$, $(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \to \mathbf{q}$,
- $\mathbf{p} \to (\mathbf{p} \vee \mathbf{q})$, $\mathbf{q} \to (\mathbf{p} \vee \mathbf{q})$,
- $\neg\neg\mathbf{p} \to \mathbf{p}$, $(\mathbf{p} \to \mathbf{q}) \to ((\mathbf{p} \to \neg\mathbf{q}) \to \neg\mathbf{p})$,
- $\mathbf{p} \to (\mathbf{q} \to \mathbf{p})$, $\mathbf{p} \to (\mathbf{q} \to (\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}))$.

Einzige Inferenzregel der Aussagenlogik ist die folgende Abbildung Modus Ponens

$$\mathbf{MP} : \mathbf{Fml} \times \mathbf{Fml} \to \mathbf{Fml} : \ (\varphi, \varphi \to \psi) \mapsto \psi.$$

Wir schreiben dafür auch kurz

$$\textbf{(MP)} \quad \frac{\varphi, \varphi \to \psi}{\psi}.$$

Die Inferenzregel ist so zu verstehen, daß φ, ψ beliebige zusammengesetzte Formeln sein können.

Definition 2.1.12 (Beweis)
Ein Beweis einer Formel φ aus einer Theorie $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{Fml}_{\mathcal{L}}$ ist eine Folge $\varphi_1, \ldots, \varphi_\mathbf{n}$ von Formeln so, daß $\varphi_\mathbf{n} = \varphi$ und für alle $\mathbf{i}$ mit $1 \leq \mathbf{i} \leq \mathbf{n}$ gilt eine der folgenden Bedingungen:

- *$\varphi_\mathbf{i}$ ist Substitutions-Instanz eines Axioms,*
- *$\varphi_\mathbf{i} \in \mathbf{T}$,*
- *Es gibt $\varphi_\mathbf{l}, \varphi_\mathbf{k} = (\varphi' \to \varphi_\mathbf{i})$ mit $\mathbf{l}, \mathbf{k} < \mathbf{i}$. $\varphi_\mathbf{i}$ ist also das Resultat der Anwendung des Modus Ponens auf Vorgänger-Formeln von $\varphi_\mathbf{i}$.*

Wir schreiben: $\mathbf{T} \vdash \varphi$.

Theorem 2.1.13 (Vollständigkeit)
Eine Formel folgt semantisch aus einer Theorie $\mathbf{T}$ genau dann, wenn sie abgeleitet werden kann:

$$\mathbf{T} \vdash \varphi \ \ \underline{\text{gdw}} \ \ \mathbf{T} \models \varphi$$

Theorem 2.1.14 (Kompaktheit)
Eine Formel folgt aus einer Theorie $\mathbf{T}$ genau dann, wenn sie schon aus einer endlichen Teilmenge von $\mathbf{T}$ folgt:

$$\mathbf{Cn}(\mathbf{T}) = \bigcup \{\mathbf{Cn}(\mathbf{T}') : \mathbf{T}' \subseteq \mathbf{T}, \ \mathbf{T}' \ \textit{endlich}\}.$$

2.1.1 Monotone Regelsysteme

Obwohl wir in der Aussagenlogik mit den obengenannten Axiomen und dem Modus Ponens auskommen, ist es sinnvoll, allgemeinere Systeme zu betrachten. Dazu führen wir den folgenden Begriff ein:

Definition 2.1.15 (Regelsystem MP + D)
Sei D eine Menge von allgemeinen Inferenzregeln, d.h. Abbildungen, die einer endlichen Menge von Formeln $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\mathbf{n}$ eine Formel ψ zuordnen. Wir schreiben dies als

$$\frac{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\mathbf{n}}{\psi}.$$

Unter MP + D verstehen wir das Regelsystem, das entsteht, wenn die Regeln aus D zur Regel Modus Ponens hinzugenommen werden.

Für $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{Fml}$ *sei im folgenden*

$$\mathbf{Cn^D}(\mathbf{W})$$

die Menge aller Formeln φ, *die man aus* $\mathbf{W}$ *und den Inferenzregeln aus MP + D (im Sinne der Definition 2.1.12, nun dürfen aber zusätzlich die Regeln aus D angewandt werden) ableiten kann.*

Man beachte, daß $\mathbf{Cn}(\mathbf{W})$ semantisch, $\mathbf{Cn^D}(\mathbf{W})$ aber syntaktisch (über den Begriff des Beweises) definiert sind. Im Spezialfall $\mathbf{D} = \emptyset$ stimmen beide Mengen nach dem Vollständigkeitssatz überein.

Lemma 2.1.16 (Eigenschaften von $\mathbf{Cn^D}$)
Sei $\mathbf{D}$ *eine Menge von allgemeinen Inferenzregeln und* $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{Fml}$. *Dann gilt:*

1. $\mathbf{Cn}(\mathbf{W}) \subseteq \mathbf{Cn^D}(\mathbf{W})$.
2. $\mathbf{Cn^D}(\mathbf{Cn^D}(\mathbf{W})) = \mathbf{Cn^D}(\mathbf{W})$.
3. $\mathbf{Cn^D}(\mathbf{W})$ *ist die kleinste unter* $\mathbf{D}$ *abgeschlossene Menge die W enthält.*

Was ist der Unterschied zwischen einer Inferenzregel $\frac{\varphi}{\psi}$ und der Implikation $\varphi \rightarrow \psi$? Angenommen, wir haben eine Formelmenge $\mathbf{T}$ gegeben und wir wählen zwei Konstanten $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathcal{L}$. Man könnte doch einerseits

(1) $\mathbf{T}$ zusammen mit MP und $\{\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{q}}\}$

und andererseits

(2) $\mathbf{T} \cup \{\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}\}$ zusammen mit MP

betrachten. Im ersten Fall bedeutet dies

$$\mathbf{Cn}^{\{\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{q}}\}}(\mathbf{T})$$

und im zweiten Fall

$$\mathbf{Cn}(\mathbf{T} \cup \{\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}\}).$$

Der Unterschied ist, daß **(1)** keine Kontraposition erlaubt, **(2)** aber schon. D.h. im zweiten Fall gilt $\mathbf{T} \cup \{\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}\} \models \neg\mathbf{p} \rightarrow \neg\mathbf{q}$. Falls etwa $\mathbf{T} \vdash \neg\mathbf{p}$, so gilt in **(2)**: $\mathbf{T} \cup \{\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}\} \models \neg\mathbf{p}$, aber in **(1)** gilt dies nicht:

$$\mathbf{Cn}^{\{\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{q}}\}}(\{\neg\mathbf{q}\}) = \mathbf{Cn}(\{\neg\mathbf{q}\}), \quad \text{aber} \quad \mathbf{Cn}(\{\neg\mathbf{q}\} \cup \{\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}\}) = \mathbf{Cn}(\{\neg\mathbf{q}, \neg\mathbf{p}\}).$$

Inferenzregeln funktionieren nur in eine Richtung: Sie vermeiden Seiteneffekte!

Bemerkung 2.1.17 (Spezielle Form monotoner Inferenzregeln)
Wir können uns bei monotonen Inferenzregeln auf solche der Form

$$\frac{\alpha}{\beta}$$

beschränken, d.h. die Prämissenmenge besteht nur aus einer einzigen Formel.

Beweis: $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_{\mathbf{k}}$ hat eine Ableitung in MP+D bezüglich einer Menge $\mathbf{T}$ gdw $\forall 1 \leq \mathbf{i} \leq \mathbf{k} : \varphi_{\mathbf{i}}$ hat Ableitung in MP+D bezüglich $\mathbf{T}$. Daher kann man

$$\frac{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{\mathbf{k}}}{\psi} \text{ durch } \frac{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_{\mathbf{k}}}{\psi}$$

ersetzen. ∎

Definition 2.1.18 ($\mathbf{R^D}$ Operator)
Für eine Menge von monotonen Inferenzregeln D und eine Theorie $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{Fml}$ sei

$$\mathbf{R^D}(\mathbf{W}) :=_{\mathbf{def}} \mathbf{Cn}(\mathbf{W} \cup \{\gamma : \frac{\alpha}{\gamma} \in \mathbf{D} \textit{ und } \alpha \in \mathbf{W}\})$$

Lemma 2.1.19 (Eigenschaften von $\mathbf{R^D}$)
$\mathbf{R^D}$ ist monoton, kompakt und progressiv. Es gibt also zu jedem $\mathbf{Y} \subseteq \mathbf{Fml}_{\mathcal{L}}$ eine kleinste Menge $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Fml}_{\mathcal{L}}$ mit $\mathbf{Y} \subseteq \mathbf{Z}$ und $\mathbf{R^D}(\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$. Außerdem ist $\mathbf{Z} = \mathbf{R^D} \uparrow^{\omega} (\mathbf{Y})$.

Theorem 2.1.20 ($\mathbf{Cn^D} = \mathbf{R^D} \uparrow^{\omega}$)
Für alle $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{Fml}$: $\mathbf{Cn^D}(\mathbf{W}) = \mathbf{R^D} \uparrow^{\omega} (\mathbf{W})$.

Beweis:

$\subseteq$: Sei $\varphi \in \mathbf{Cn^D}(\mathbf{W})$, φ hat also einen Beweis in MP+D. Wir machen eine Induktion über die Länge dieses Beweises. Sei $\varphi_1, \ldots, \varphi_{\mathbf{n}}$ ein Beweis von φ aus W in MP+D.
Wir haben zu zeigen, daß $\varphi \in \mathbf{R^D} \uparrow^{\omega} (\mathbf{W})$.

- **Induktions-Anfang:** $\mathbf{n} = 0$. Klar, aufgrund der Definition von $\mathbf{R^D}$.
- **Induktions-Schluß:** $(\mathbf{n} - 1) \mapsto \mathbf{n}$. Unsere Annahme sagt, daß die Aussage für Beweise der Länge höchstens $\mathbf{n} - 1$ gilt. Sei ein Beweis der Länge $\mathbf{n}$ vorgelegt. Dann gilt $\forall \mathbf{i} < \mathbf{n} : \varphi_{\mathbf{i}} \in \mathbf{R^D} \uparrow^{\omega} (\mathbf{W})$ also $\exists \mathbf{m} \in \mathbb{N} : \forall \mathbf{i} \leq \mathbf{n}\, \varphi_{\mathbf{i}} \in \mathbf{R^D} \uparrow^{\mathbf{m}} (\mathbf{W})$. Wir haben zu zeigen, daß $\varphi \in \mathbf{R^D} \uparrow^{\omega} (\mathbf{W})$.
  Dies zeigen wir durch Fallunterscheidung: Wie entstand φ?

1. Fall: $\varphi_{\mathbf{n}}$ ist Axiom, dann $\varphi \in \mathbf{R^D} \uparrow^{1} (\mathbf{W})$.
2. Fall: $\varphi_{\mathbf{n}} \in \mathbf{W}$, dann erst recht $\varphi \in \mathbf{R^D} \uparrow^{1} (\mathbf{W})$.
3. Fall: $\varphi_{\mathbf{n}}$ entsteht durch Anwendung von Modus Ponens auf $\varphi_{\mathbf{l}}, \varphi_{\mathbf{k}}$ mit $\mathbf{l}, \mathbf{k} < \mathbf{n}$. Da $\mathbf{R^D} \uparrow^{\mathbf{m}} (\mathbf{W})$ abgeschlossen ist unter MP und nach Induktionsvoraussetzung $\varphi_{\mathbf{l}}, \varphi_{\mathbf{k}} \in \mathbf{R^D} \uparrow^{\mathbf{m}} (\mathbf{W})$ gilt, ist auch $\varphi \in \mathbf{R^D} \uparrow^{\mathbf{m}} (\mathbf{W})$.
4. Fall: $\varphi_{\mathbf{n}}$ entsteht durch Anwendung einer Regel aus D: $\frac{\varphi_{\mathbf{i}}}{\varphi_{\mathbf{n}}}$ mit $\mathbf{i} < \mathbf{n}$. Nach Definition des $\mathbf{R^D}$ Operators ist dann $\varphi_{\mathbf{n}} \in \mathbf{R^D} \uparrow^{\mathbf{m}+1} (\mathbf{W})$.

$\supseteq$: Wir zeigen durch Induktion

$$\mathbf{R^D} \uparrow^{\mathbf{n}} (\mathbf{W}) \subseteq \mathbf{Cn^D}(\mathbf{W}).$$

- $\mathbf{n} = 0$: $\mathbf{R^D} \uparrow^0 (\mathbf{W}) = \mathbf{Cn}(\mathbf{W})$.
- $\mathbf{n} \mapsto \mathbf{n}+1$: Sei $\mathbf{R^D} \uparrow^{\mathbf{n}} (\mathbf{W}) \subseteq \mathbf{Cn^D}(\mathbf{W})$. Dann gilt

$$\mathbf{R^D} \uparrow^{\mathbf{n}+1} (\mathbf{W}) = \mathbf{Cn}(\underbrace{\underbrace{\mathbf{R^D} \uparrow^{\mathbf{n}} (\mathbf{W})}_{\subseteq \mathbf{Cn^D}(\mathbf{W})} \cup \underbrace{\{\gamma : \frac{\alpha}{\gamma} \in \mathbf{D} \wedge \alpha \in \mathbf{R^D} \uparrow^{\mathbf{n}} (\mathbf{W})\}}_{\subseteq \mathbf{Cn^D}(\mathbf{W})}}_{\subseteq \mathbf{Cn^D}(\mathbf{W})}).$$

■

2.2 Motivation und Syntax der Default Logik

Definition 2.2.1 (Default-Theorie $(\mathbf{W}, \mathcal{D})$)
Eine Default Theorie ist ein Paar $(\mathbf{W}, \mathcal{D})$ mit :

- $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{Fml}_{\mathcal{L}}$ *ist eine aussagenlogische Menge von Formeln,*
- $\mathcal{D}$ *ist eine Menge von Defaults der Form :*

$$\mathbf{d} = \frac{\alpha : \beta_1, \ldots, \beta_{\mathbf{n}}}{\gamma}.$$

Dabei sind α, $\beta_1, \ldots, \beta_{\mathbf{n}}$, γ $\in \mathbf{Fml}_{\mathcal{L}}$. Wir nennen

  - α *die Vorbedingung von* $\mathbf{d}$,
  - $\beta_{\mathbf{i}}$ *die Rechtfertigungen von* $\mathbf{d}$ *und*
  - γ *die Konsequenz von* $\mathbf{d}$.

Wir schreiben auch $\alpha = \mathbf{prereq}(\mathbf{d})$, $\mathcal{J}(\mathbf{d}) = \{\beta_1, \ldots, \beta_{\mathbf{n}}\}$, $\gamma = \mathbf{concl}(\mathbf{d})$.

- $\mathbf{d}$ *heißt p-frei falls $\alpha = \top$. Wir schreiben auch $\frac{\emptyset : \beta_1, \ldots, \beta_{\mathbf{n}}}{\gamma}$.*
- $\mathbf{d}$ *heißt j-frei falls $\mathcal{J}(\mathbf{d}) = \emptyset$, bzw. $\mathcal{J}(\mathbf{d}) = \{\top\}$.*

Im folgenden definieren wir einen Beweiskalkül für Defaults. Die Grundidee dabei ist, daß die Anwendung eines Default von dem jeweiligen Kontext abhängt. Wir interpretieren

$$\frac{\alpha : \beta}{\gamma}$$

als

"Falls α gilt und es konsistent ist β anzunehmen, dann leite γ ab."

Um dies auszudrücken, definieren wir den Begriff des $\mathbf{S}$-Beweises einer Formel φ aus $\mathbf{W}$ bez. einer Menge von Inferenzregeln MP+$\mathcal{D}$.

Definition 2.2.2 (S-Beweis bez. MP+$\mathcal{D}$)
Sei $(\mathbf{W}, \mathcal{D})$ eine Defaulttheorie. Für $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{Fml}_{\mathcal{L}}$ und $\varphi \in \mathbf{Fml}_{\mathcal{L}}$ definieren wir den $\mathbf{S}$-Beweis einer Formel φ aus $\mathbf{W}$ bez. MP+D als Folge $\varphi_1, \ldots, \varphi_{\mathbf{n}}$ so, daß gilt:

1. $\varphi_{\mathbf{n}} = \varphi$,
2. $\forall\, 1 \le \mathbf{i} \le \mathbf{n}$ *gilt eine der folgenden Bedingungen:*
   (a) $\varphi_{\mathbf{i}} \in \mathbf{W}$,
   (b) $\varphi_{\mathbf{i}}$ *ist eine Substitutionsinstanz eines AL-Axioms,*
   (c) $\varphi_{\mathbf{i}}$ *entsteht durch Anwendung des Modus Ponens,*
   (d) $\varphi_{\mathbf{i}}$ *entsteht durch Anwendung eines Defaults, d.h. es gibt* $\frac{\varphi_{\mathbf{j}}:\beta_1,\ldots,\beta_{\mathbf{m}}}{\varphi_{\mathbf{i}}} \in \mathcal{D}$ *mit* $\mathbf{j} < \mathbf{i}$ *und* $\neg\beta_1 \notin \mathbf{S}, \ldots, \neg\beta_{\mathbf{m}} \notin \mathbf{S}$.

$\mathbf{S}$ *heißt der* Kontext. *Wir bezeichnen mit* $\mathbf{Cn}^{\mathcal{D},\mathbf{S}}(\mathbf{W})$ *die Menge aller Formeln, die einen* $\mathbf{S}$*-Beweis aus* $\mathbf{W}$ *bez. MP+*$\mathcal{D}$ *besitzen.*

Lemma 2.2.3 ($\mathbf{Cn}^{\mathcal{D},\mathbf{S}}$ ist eine Erweiterung von $\mathbf{Cn}^{\mathbf{D}}$)
Sei $\mathcal{D}$ *eine Menge von j-freien Defaults. Sei* $\mathbf{D_{mon}} :=_{\mathbf{def}} \{\frac{\alpha}{\gamma} : \frac{\alpha:\emptyset}{\gamma} \in \mathcal{D}\}$. *Für jeden Kontext* $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{Fml}$ *und für jede Theorie* $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{Fml}$ *gilt:*

$$\mathbf{Cn}^{\mathbf{D_{mon}}}(\mathbf{W}) = \mathbf{Cn}^{\mathcal{D},\mathbf{S}}(\mathbf{W}).$$

Das letzte Lemma sagt aus, daß für j-freie Defaults alle Konsequenzoperatoren, die man mit MP+$\mathcal{D}$ assoziieren kann, übereinstimmen. Zusätzlich fallen sie mit denen des monotonen Systems $\mathbf{MP} + \mathbf{D_{mon}}$ zusammen.

Theorem 2.2.4 (Eigenschaften von $\mathbf{Cn}^{\mathcal{D},\mathbf{S}}$)
$\mathbf{Cn}^{\mathcal{D},\mathbf{S}}(\mathbf{W})$ *ist monoton in* $\mathcal{D}$ *und* $\mathbf{W}$, *aber antimonoton in* $\mathbf{S}$*:*

1. *Monotonie in* $\mathbf{W}$*:* $\mathbf{W}_1 \subseteq \mathbf{W}_2 \Rightarrow \mathbf{Cn}^{\mathcal{D},\mathbf{S}}(\mathbf{W}_1) \subseteq \mathbf{Cn}^{\mathcal{D},\mathbf{S}}(\mathbf{W}_2)$.
2. *Monotonie in* $\mathcal{D}$*:* $\mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{D}_2 \Rightarrow \mathbf{Cn}^{\mathcal{D}_1,\mathbf{S}}(\mathbf{W}) \subseteq \mathbf{Cn}^{\mathcal{D}_2,\mathbf{S}}(\mathbf{W})$.
3. *Antimonotonie in* $\mathbf{S}$*:* $\mathbf{S}_1 \subseteq \mathbf{S}_2 \Rightarrow \mathbf{Cn}^{\mathcal{D},\mathbf{S}_2}(\mathbf{W}) \subseteq \mathbf{Cn}^{\mathcal{D},\mathbf{S}_1}(\mathbf{W})$.

Wir haben jetzt eine große Auswahl an Konsequenzoperatoren:

$$\{\mathbf{Cn}^{\mathcal{D},\mathbf{S}}(\mathbf{W}) \,:\, \mathbf{S} \subseteq \mathbf{Fml}\}.$$

Welches sind die richtigen? Wie wählt man zu gegebener Default Theorie $(\mathbf{W}, \mathcal{D})$ das "richtige" $\mathbf{S}$?

2.3 Allgemeine Default Theorien

Definition 2.3.1 (Extension)
Eine Theorie $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{Fml}$ *heißt Extension der Default Theorie* $(\mathbf{W}, \mathcal{D})$, *falls*

$$\mathbf{E} = \mathbf{Cn}^{\mathcal{D},\mathbf{E}}(\mathbf{W}).$$

$\mathbf{E}$ *ist also Fixpunkt des* $\mathbf{Cn}^{\mathcal{D},\odot}(\mathbf{W})$*-Operators im zweiten Argument.*

Am besten stellt man sich eine Extension als nachträglich *rechtfertigte*, in sich stabile Menge vor. Wir fangen mit einer potentiellen Menge $\mathbf{S}$ von Formeln an. Diese interpretieren wir als *Kontext*, relativ zu dem wir Folgerungen ziehen. Wenn nun die Menge aller aus $(\mathbf{W}, \mathcal{D})$ relativ zu $\mathbf{S}$ folgerbaren Formeln genau mit $\mathbf{S}$ übereinstimmt, haben wir $\mathbf{S}$ im nachhinein als richtige Wahl rechtfertigt. $\mathbf{S}$ stabilisiert sich selbst — $\mathbf{S}$ ist somit ein möglicher Kandidat für den Abschluß von $(\mathbf{W}, \mathcal{D})$.

Für Beispiel 1.4.1 (Ausnahmen), also $\mathbf{W} :=_{\mathbf{def}} \{\mathbf{vogel}\}$, $\mathcal{D} :=_{\mathbf{def}} \{\frac{\mathbf{vogel:fliegt}}{\mathbf{fliegt}}\}$, erhalten wir

$\mathbf{S}$	$\mathbf{Cn}(\mathbf{W})$	$\mathbf{Cn}(\mathbf{W} \cup \{\mathbf{fliegt}\})$	$\mathbf{Cn}(\mathbf{W} \cup \{\mathbf{fliegt}\})$	$\mathbf{Fml}$
$\mathbf{Cn}^{\mathcal{D},\mathbf{S}}(\mathbf{W})$	$\mathbf{Cn}(\mathbf{W} \cup \{\mathbf{fliegt}\})$	$\mathbf{Cn}(\mathbf{W} \cup \{\mathbf{fliegt}\})$	$\mathbf{Cn}(\mathbf{W})$	$\mathbf{Cn}(\mathbf{W})$

Es gibt also genau eine Extension, nämlich $\mathbf{Cn}(\mathbf{W} \cup \{\mathbf{fliegt}\})$. Tweety fliegt also!

Für Beispiel 1.4.2 (Nixon Diamant), also $\mathbf{W} :=_{\mathbf{def}} \{\mathbf{q}, \mathbf{r}\}$, $\mathcal{D} :=_{\mathbf{def}} \{\frac{\mathbf{q:p}}{\mathbf{p}}, \frac{\mathbf{r:\neg p}}{\mathbf{\neg p}}\}$:

$\mathbf{S}$	$\mathbf{Cn}(\mathbf{W})$	$\mathbf{Cn}(\mathbf{W} \cup \{\mathbf{p}\})$	$\mathbf{Cn}(\mathbf{W} \cup \{\neg\mathbf{p}\})$	$\mathbf{Fml}$
$\mathbf{Cn}^{\mathcal{D},\mathbf{S}}(\mathbf{W})$	$\mathbf{Fml}$	$\mathbf{Cn}(\mathbf{W} \cup \{\mathbf{p}\})$	$\mathbf{Cn}(\mathbf{W} \cup \{\neg\mathbf{p}\})$	$\mathbf{Cn}(\mathbf{W})$

Hier gibt es also zwei Extensionen, nämlich $\mathbf{Cn}(\mathbf{W} \cup \{\mathbf{p}\})$ und $\mathbf{Cn}(\mathbf{W} \cup \{\neg\mathbf{p}\})$. Beide Extensionen entsprechen den möglichen Gegebenheiten. Auch hier stimmt also der Extensionsbegriff mit dem intuitiven Begriff überein.

Theorem 2.3.2 (Existenz von Extensionen)
Sei $\mathcal{D}$ eine Menge von j-freien Defaults, $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{Fml}$, $\mathbf{D_{mon}} :=_{\mathbf{def}} \{\frac{\alpha}{\gamma} : \frac{\alpha:\emptyset}{\gamma} \in \mathcal{D}\}$.
Dann ist $\mathbf{Cn}^{\mathbf{D_{mon}}}(\mathbf{W})$ die einzige Extension von $(\mathbf{W}, \mathcal{D})$.

Beweis: Sei $\mathbf{S}'$ eine Extension:

$$\mathbf{S}' = \mathbf{Cn}^{\mathcal{D},\mathbf{S}'}(\mathbf{W}) = \mathbf{Cn}^{\mathbf{D_{mon}}}(\mathbf{W}) = \mathbf{S}.$$

Das mittlere Gleichheitszeichen gilt wegen Lemma 2.2.3. ■

Mit anderen Worten: j-freie Defaults sind genau die monotonen Inferenzregeln aus Abschnitt 2.1.1.

Definition 2.3.3 (Redukt $\mathbf{D_S}$)
Für eine Menge von Defaults $\mathcal{D}$ und $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{Fml}$ *sei*

$$\mathbf{D_S} :=_{\mathbf{def}} \{\frac{\alpha}{\gamma} : \frac{\alpha : \beta_1 \ldots \beta_\mathbf{n}}{\gamma} \in \mathcal{D},\ \neg\beta_1 \notin \mathbf{S} \ldots \neg\beta_\mathbf{n} \notin \mathbf{S}\}$$

das Redukt von $\mathcal{D}$ bezüglich $\mathbf{S}$. $\mathbf{D_S}$ *ist also eine von $\mathcal{D}$ induzierte Menge von monotonen Inferenzregeln. Die Definition ist so zu verstehen, daß für j-freie Defaults $\frac{\alpha:\emptyset}{\gamma}$ die Regel $\frac{\alpha}{\gamma}$ auf jeden Fall aufgenommen wird. Es ist also immer* $\mathbf{D_{mon}} \subseteq \mathbf{D_S}$.

Das folgende Theorem ist sehr einfach zu beweisen. Der Unterschied zwischen $\mathbf{Cn}^{\mathcal{D},\mathbf{S}}$ und $\mathbf{Cn}^{\mathbf{D_S}}$ besteht nämlich nur im Zeitpunkt der Evaluierung.

Theorem 2.3.4 ($\mathbf{Cn}^{\mathcal{D},\mathbf{S}} = \mathbf{Cn}^{\mathbf{D_S}}$)
Es gilt für alle $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{Fml}$:

$$\mathbf{Cn}^{\mathcal{D},\mathbf{S}}(\mathbf{W}) = \mathbf{Cn}^{\mathbf{D_S}}(\mathbf{W}).$$

Lemma 2.3.5
Für festes $\mathbf{S}$ ist $\mathbf{Cn}^{\mathbf{D_S}} : \mathbf{Pot}(\mathbf{Fml}) \to \mathbf{Pot}(\mathbf{Fml})$ monoton, kompakt und progressiv.

Korollar 2.3.6
$\mathbf{S}$ *ist eine Extension von* $(\mathbf{W}, \mathcal{D})$ <u>gdw</u> $\mathbf{S} = \mathbf{R}^{\mathbf{D_S}} \uparrow^{\omega} (\mathbf{W})$.

Wir betrachten nun einen ganz anderen Operator. Angenommen, wir haben eine Defaulttheorie $(\mathbf{W}, \mathcal{D})$ vorliegen. Unser Operator ist auf beliebigen Formelmengen $\mathbf{S}$ definiert und ordnet $\mathbf{S}$ eine Menge zu, die mindestens $\mathbf{W}$ enthält, deduktiv abgeschlossen ist und die auch alle Defaults angewandt hat.

Definition 2.3.7 (Reiters Γ)
Wir definieren einen Operator $\Gamma^{\mathcal{D},\mathbf{W}} : \mathbf{Pot}(\mathbf{Fml}) \to \mathbf{Pot}(\mathbf{Fml})$ wie folgt. Es sei $\Gamma^{\mathcal{D},\mathbf{W}}(\mathbf{S})$ die kleinste Menge $\mathbf{U}$ mit:

- $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{U}$,
- $\mathbf{Cn}(\mathbf{U}) = \mathbf{U}$,
- $\forall\, \mathbf{d} \in \mathcal{D}$: *falls* $\mathbf{prereq}(\mathcal{D}) \in \mathbf{U}$ *und* $\forall\, \beta \in \mathcal{J}(\mathcal{D}) : \neg\beta \notin \mathbf{S}$ *so* $\mathbf{concl}(\mathcal{D}) \in \mathbf{U}$.

$\mathbf{E}$ *heißt Reiter-Extension falls* $\Gamma^{\mathcal{D},\mathbf{W}}(\mathbf{E}) = \mathbf{E}$.

Das nächste Beispiel zeigt die Wirkungsweise dieses Operators.

Beispiel 2.3.8 (DL-Theorie ohne Extensionen)
Sei $\mathbf{W} :=_{\mathbf{def}} \emptyset$, $\mathcal{D} :=_{\mathbf{def}} \{\frac{\emptyset:\neg\mathbf{p}}{\mathbf{p}}\}$.

$\mathbf{S}$	$\mathbf{Cn}(\{\mathbf{p}\})$	$\mathbf{Cn}(\emptyset)$
$\Gamma(\mathbf{S})$	$\mathbf{Cn}(\emptyset)$	$\mathbf{Cn}(\{\mathbf{p}\})$

Die DL-Theorie $(\emptyset, \{\frac{\emptyset:\neg\mathbf{p}}{\mathbf{p}}\})$ hat keine Reiter-Extension.

Wenn wir Γ auf eine kleine Menge anwenden (etwa $\mathbf{Cn}(\emptyset)$), erhalten wir eine große Menge als Ergebnis (z.B. $\mathbf{Cn}(\{\mathbf{p}\})$). Wenden wir aber Γ auf eine große Menge an ($\mathbf{Cn}(\{\mathbf{p}\})$) so erhalten wir eine kleine Menge als Ergebnis ($\mathbf{Cn}(\emptyset)$). Um eine Extension zu bekommen, müssen wir also die *richtige* Menge raten.

Das nächste Theorem zeigt, daß Extensionen genau mit Reiter-Extensionen übereinstimmen:

Theorem 2.3.9 (Extensionen = Reiter-Extensionen)
Ist $(\mathbf{W}, \mathcal{D})$ eine Defaulttheorie und $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{Fml}$, so gilt:

$$\Gamma^{\mathcal{D},\mathbf{W}}(\mathbf{S}) = \mathbf{Cn}^{\mathbf{D_S}}(\mathbf{W}) = \mathbf{Cn}^{\mathcal{D},\mathbf{S}}(\mathbf{W}).$$

Beispiel 2.3.10 (DL-Theorie mit inkonsistenter Extension)
Sei $\mathcal{D} :=_{\mathbf{def}} \{\frac{\mathbf{p}:\emptyset}{\neg\mathbf{p}}\}$, $\mathbf{W} :=_{\mathbf{def}} \{\mathbf{p}\}$. *Dann ist* $\mathbf{Cn}^{\mathcal{D},\mathbf{S}}(\{\mathbf{p}\}) = \mathbf{Fml}$ *für alle* $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{Fml}_{\mathcal{L}}$ *und damit ist* $\mathbf{Fml}$ *die einzige Extension.*

Beispiel 2.3.11 (DL-Theorie mit genau einer Extension)
Sei $\mathcal{D} :=_{\mathbf{def}} \{\frac{\emptyset:\neg\mathbf{p}}{\mathbf{q}}\}$, $\mathbf{W} :=_{\mathbf{def}} \emptyset$. *Wir haben* $\Gamma(\mathbf{Cn}(\emptyset)) = \mathbf{Cn}(\{\mathbf{q}\})$, $\Gamma(\mathbf{Cn}(\{\mathbf{q}\}) = \mathbf{Cn}(\{\mathbf{q}\})$ *und* $\Gamma(\mathbf{Cn}(\{\mathbf{p}\})) = \mathbf{Cn}(\emptyset)$. *Also ist* $\mathbf{Cn}(\{\mathbf{q}\})$ *die einzige Extension von* $(\emptyset, \{\frac{\emptyset:\neg\mathbf{p}}{\mathbf{q}}\})$.

Definition 2.3.12 (Abgeschlossen unter $\mathcal{D}$)
Eine Theorie $\mathbf{S}$ *heißt abgeschlossen unter einem Default* $\mathbf{d}$*, falls gilt:*

$$\mathbf{prereq}(\mathbf{d}) \in \mathbf{S} \wedge \forall \beta \in \mathcal{J}(\mathbf{d}) : \neg\beta \notin \mathbf{S} \implies \mathbf{concl}(\mathbf{d}) \in \mathbf{S}.$$

$\mathbf{S}$ *heißt abgeschlossen unter ganz* $\mathcal{D}$*, falls dies für alle* $\mathbf{d} \in \mathcal{D}$ *gilt.*

Lemma 2.3.13 (Extensionen sind abgeschlossen)
Extensionen einer Default-Theorie $(\mathbf{W}, \mathcal{D})$ *sind abgeschlossen unter* $\mathcal{D}$.

Beweis: $\mathbf{S}$ ist abgeschlossen unter $\mathcal{D}$ gdw $\mathbf{S}$ ist abgeschlossen unter $\mathbf{D_S}$. Da für Extensionen aber $\mathbf{S} = \mathbf{Cn}^{\mathbf{D_S}}(\mathbf{W})$ gilt, ist dies trivialerweise erfüllt. ■

Es stellt sich daher die Frage: *Reicht der Abschluß unter den Defaults nicht aus?* Mit anderen Worten: *Können wir Extensionen nicht genau als die unter Defaults abgeschlossenen Mengen definieren* und uns dadurch die komplizierte Fixpunkt-Definition sparen?

Beispiel 2.3.14 (Gegenbeispiel)
Sei $\mathbf{W} :=_{\mathbf{def}} \{\alpha \to \beta\}$ *und* $\mathcal{D} :=_{\mathbf{def}} \{\frac{\emptyset:\neg\alpha}{\alpha}, \frac{\beta:\emptyset}{\alpha}\}\}$. *Es gilt* $\Gamma(\mathbf{Cn}(\{\alpha, \beta\}) = \mathbf{Cn}(\mathbf{W})$ *und* $\Gamma(\mathbf{Cn}(\mathbf{W}) = \mathbf{Cn}(\{\alpha, \beta\})$. *Daher sind diese Mengen keine Extensionen. Aber* $\mathbf{Cn}(\{\alpha, \beta\})$ *ist abgeschlossen unter* $\mathcal{D}$*!*

Trotzdem sind die unter Defaults abgeschlossenen Mengen eng mit eine Konsequenzrelation verwandt. Wir wollen folgende modifizierte Konsequenzrelation betrachten:

Definition 2.3.15 (Schwache Konsequenzrelation $\mathbf{Cn}_{\mathbf{weak}}^{\mathcal{D},\mathbf{S}}$)
Wir modifizieren Punkt (d) in Definition 2.2.2:

(d) es gibt $\frac{\alpha:\beta_1,\ldots,\beta_n}{\varphi_i} \in \mathcal{D}$ *, so daß* $\alpha \in \mathbf{S}$ *und* $\neg\beta_1 \notin \mathbf{S}, \ldots, \neg\beta_{\mathbf{m}} \notin \mathbf{S}$.

In der ursprünglichen Definition mußte das α *ein* $\varphi_{\mathbf{j}}$ *sein, also schon hergeleitet. Nun genügt es, daß es in* $\mathbf{S}$ *enthalten ist.*

$\mathbf{E}$ *heißt* schwache Extension *von* $(\mathbf{W}, \mathcal{D})$*, falls* $\mathbf{Cn}_{\mathbf{weak}}^{\mathcal{D},\mathbf{E}}(\mathbf{W}) = \mathbf{E}$.

Bevor wir zeigen, daß schwache Extensionen genau die unter Defaults abgeschlossene Mengen sind, führen wir folgende Definition, die grundlegend für alle folgenden Betrachtungen ist, ein:

Definition 2.3.16 (Generating Defaults $\mathbf{GD}(\mathcal{D},\mathbf{S})$)
Ein Default $\mathbf{d}$ *heißt* erzeugend *für einen Kontext* $\mathbf{S}$*, falls* $\mathbf{prereq}(\mathbf{d}) \in \mathbf{S}$ *und* $\neg\beta \notin \mathbf{S}\ \forall \beta \in \mathcal{J}(\mathcal{D})$*. Wir bezeichnen mit* $\mathbf{GD}(\mathcal{D},\mathbf{S})$ *die Menge aller erzeugenden* $\mathbf{d} \in \mathcal{D}$*.*

Erzeugende Defaults sind also solche, deren Prämissen erfüllt sind und die deshalb "feuern" sollen, d.h. deren Konklusionen sollten im jeweiligen Kontext zu der betrachteten Menge hinzugenommen werden.

Theorem 2.3.17 (Charakterisierung von schwachen Extensionen)
Sei $(\mathbf{W},\mathcal{D})$ *eine Defaulttheorie und* $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{Fml}$*.*

1. $\mathbf{E}$ *ist eine schwache Extension* <u>gdw</u> $\mathbf{E} = \mathbf{Cn}(\mathbf{W} \cup \mathbf{Concl}(\mathbf{GD}(\mathcal{D},\mathbf{E})))$.
2. *Schwache Extensionen sind abgeschlossen unter* $\mathcal{D}$*.*
3. $\mathbf{Cn}^{\mathcal{D},\mathbf{S}}(\mathbf{W}) \subseteq \mathbf{S} \Longrightarrow \mathbf{Cn}^{\mathcal{D},\mathbf{S}}(\mathbf{W}) \subseteq \mathbf{Cn}^{\mathcal{D},\mathbf{S}}_{\mathbf{weak}}(\mathbf{W})$.
4. *Jede Extension ist auch eine schwache Extension.*

Beweis:

1. Es gilt $\mathbf{Cn}^{\mathcal{D},\mathbf{E}}_{\mathbf{weak}} = \mathbf{Cn}(\mathbf{W} \cup \mathbf{Concl}(\mathbf{GD}(\mathcal{D},\mathbf{E})))$ nach Definition.
2. Dies folgt sofort aus 1.
3. Unter der Voraussetzung $\mathbf{Cn}^{\mathcal{D},\mathbf{S}}(\mathbf{W}) \subseteq \mathbf{S}$ ist jede Ableitung im Sinne von Definition 2.2.2 auch eine Ableitung im Sinne der modifizierten Definition 2.3.15.
4. Dies folgt sofort aus 3.

■

Theorem 2.3.18 (Extensionen und schwache Extensionen)
Sei $(\mathbf{W},\mathcal{D})$ *eine Defaulttheorie.*

1. *Extensionen bilden eine Anti-Kette:* $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{E}' \Longrightarrow \mathbf{E} = \mathbf{E}'$.
   Für schwache Extensionen gilt dies nicht.
2. *Ist* $\mathcal{D}$ *p-frei, so stimmen Extensionen mit schwachen Extensionen überein.*
3. *Ist* $\mathbf{E}$ *Extension von* $(\mathbf{W},\mathcal{D})$*, so ist es die einzige Extension von* $(\mathbf{W},\mathbf{GD}(\mathcal{D},\mathbf{E}))$*.*
4. $(\mathbf{W},\mathcal{D})$ *besitzt* $\mathbf{Fml}$ *als Extension* <u>gdw</u> $\mathbf{Cn}^{\mathbf{D_{mon}}}(\mathbf{W}) = \mathbf{Fml}$.
5. *Sei kein Default j-frei:* $(\mathbf{W},\mathcal{D})$ *hat* $\mathbf{Fml}$ *als Extension* <u>gdw</u> $\mathbf{Cn}(\mathbf{W}) = \mathbf{Fml}$.

Beweis:

1. Nach Theorem 2.2.4 gilt wegen der Antimonotonie in $\mathbf{S}$:

$$\mathbf{E} \subseteq \mathbf{E}' = \mathbf{Cn}^{\mathcal{D},\mathbf{E}'}(\mathbf{W}) \subseteq \mathbf{Cn}^{\mathcal{D},\mathbf{E}} = \mathbf{E}.$$

2. Ist $\mathcal{D}$ p-frei, so stimmt $\mathbf{Cn}^{\mathcal{D},\mathbf{S}}$ mit $\mathbf{Cn}^{\mathcal{D},\mathbf{S}}_{\mathbf{weak}}$ überein, wie man an dem Vergleich von Definition 2.2.2 mit Definition 2.3.15 sofort sieht.

3. Sei $\mathbf{E}$ Extension von $(\mathbf{W},\mathcal{D})$ und $\mathcal{D}' :=_{\mathbf{def}} \mathbf{GD}(\mathcal{D},\mathbf{E})$. Wegen $\mathbf{D}'_{\mathbf{E}} \subseteq \mathbf{D}_{\mathbf{E}}$ gilt nach Theorem 2.2.4

$$(*) \quad \mathbf{Cn}^{\mathbf{D}'_{\mathbf{E}}}(\mathbf{W}) \subseteq \mathbf{Cn}^{\mathbf{D}_{\mathbf{E}}}(\mathbf{W}) = \mathbf{E}.$$

Die Aussage ist bewiesen, wenn wir noch zeigen können

$$\mathbf{Cn}^{\mathbf{D}'_{\mathbf{E}}} \text{ ist abgeschlossen unter } \mathbf{D}_{\mathbf{E}},$$

denn dann ist nach Theorem 2.3.4 auch $\mathbf{E} = \mathbf{Cn}^{\mathbf{D}_{\mathbf{E}}}(\mathbf{W}) \subseteq \mathbf{Cn}^{\mathbf{D}'_{\mathbf{E}}}(\mathbf{W})$.

Sei also $\frac{\alpha}{\gamma} \in \mathbf{D}_{\mathbf{E}}$ und $\alpha \in \mathbf{Cn}^{\mathbf{D}'_{\mathbf{E}}}(\mathbf{W})$. Wegen (*) gilt $\alpha \in \mathbf{E}$ also ist $\frac{\alpha}{\gamma}$ erzeugend für $\mathbf{E}$ und daher $\frac{\alpha}{\gamma} \in \mathbf{D}'_{\mathbf{E}}$, also $\gamma \in \mathbf{Cn}^{\mathbf{D}'_{\mathbf{E}}}(\mathbf{W})$.

4. Eine Richtung, nämlich $\Leftarrow$, ist trivial. Sei also $\mathbf{Fml}$ Extension von $(\mathbf{W},\mathcal{D})$. Dann ist

$$\mathbf{Fml} = \mathbf{Cn}^{\mathcal{D},\mathbf{Fml}}(\mathbf{W}) = \mathbf{Cn}^{\mathbf{D}_{\mathbf{Fml}}}(\mathbf{W}) = \mathbf{Cn}^{\mathbf{D}_{\mathbf{mon}}}(\mathbf{W}).$$

5. folgt aus 4.

■

2.3.1 Berechnen von Extensionen

Wir haben nun eine Menge von Charakterisierungen kennengelernt, aber bisher noch kein einziges Mittel an der Hand, um Extensionen wirklich zu berechnen. Die Grundidee des folgenden Algorithmus ist:

Wende so lange Defaults an, bis keiner mehr "feuert".

Definition 2.3.19 (Algorithmus zur Erzeugung von Extensionen)
Sei $(\mathbf{W},\mathcal{D})$ eine Defaulttheorie und $\preceq$ eine Wohlordnung auf $\mathcal{D}$. Wir definieren eine Ordinalzahl $\gamma_{\preceq}$ und für jedes $\zeta < \gamma_{\preceq}$ eine Menge von Defaults $\mathbf{AD}_\zeta$ und einen Default $\mathbf{d}_\zeta$. Schließlich definieren wir $\mathbf{AD}_{\preceq}$.

1. *Falls es keinen Default $\mathbf{d} \in \mathbf{D} \setminus \bigcup_{\zeta<\alpha} \mathbf{AD}_\zeta$ gibt mit :*

   (a) $\mathbf{W} \cup \mathbf{Concl}(\bigcup_{\zeta<\alpha} \mathbf{AD}_\zeta) \vdash \mathbf{prereq}(\mathcal{D})$

   (b) $\mathbf{W} \cup \mathbf{Concl}(\bigcup_{\zeta<\alpha} \mathbf{AD}_\zeta) \nvdash \neg\beta \quad (\forall\, \beta \in \mathcal{J}(\mathcal{D}))$,

   dann sei $\gamma_{\preceq} :=_{\mathbf{def}} \alpha$.

2. *Sonst definieren wir $\mathbf{d}_\alpha$ als den $\preceq$-kleinsten Default $\mathbf{d} \in \mathbf{D} \setminus \bigcup_{\zeta<\alpha} \mathbf{AD}_\zeta$ so, daß:*

(a) $\mathbf{W} \cup \mathbf{Concl}(\bigcup_{\zeta<\alpha} \mathbf{AD}_\zeta) \vdash \mathbf{prereq}(\mathcal{D})$,

(b) $\mathbf{W} \cup \mathbf{Concl}(\bigcup_{\zeta<\alpha} \mathbf{AD}_\zeta) \nvdash \neg\beta \quad (\forall\, \beta \in \mathcal{J}(\mathcal{D}))$.

Sei $\mathbf{AD}_\alpha :=_{\mathbf{def}} \bigcup_{\zeta<\alpha} \mathbf{AD}_\zeta \cup \{\mathbf{d}_\alpha\}$

3. $\mathbf{AD}_\preceq :=_{\mathbf{def}} \bigcup_{\zeta<\gamma_\preceq} \mathbf{AD}_\zeta$

Die Theorie $\mathbf{Cn}(\mathbf{W} \cup \mathbf{Concl}(\mathbf{AD}_\preceq))$ *heißt durch* $\preceq$ *erzeugt.*

Wir schreiben auch:

- für $\zeta < \gamma \ : \ \mathbf{T}_\zeta = \mathbf{Cn}(\mathbf{W} \cup \mathbf{Concl}(\mathbf{AD}_\zeta))$,
- für $\zeta \preceq \gamma \ : \ \mathbf{AD}_{<\zeta} = \bigcup_{\alpha<\zeta} \mathbf{AD}_\alpha$,
- $\mathbf{AD}_{<0} = \emptyset$,
- $\mathbf{T}_{<\zeta} = \mathbf{Cn}(\mathbf{W} \cup \mathbf{Concl}(\mathbf{AD}_{<\zeta}))$,
- $\mathbf{T}_\preceq = \mathbf{Cn}(\mathbf{W} \cup \mathbf{Concl}(\mathbf{AD}_\preceq))$.

Man macht sich leicht klar, daß diese Mengen folgende inhaltlichen Bedeutungen haben:

$\mathbf{AD}_{<\zeta}$:	Defaults, die vor dem Schritt ζ angewandt werden.
$\mathbf{AD}_\zeta$:	Defaults, die in dem ersten ζ Schritt angewandt werden.
$\mathbf{T}_{<\zeta}$:	Kontext, der im Schritt ζ benutzt wird.
$\mathbf{T}_\zeta$:	der nächste Kontext (Schritt $\zeta + 1$)

Es gilt:

- $\mathbf{GD}(\mathcal{D} \backslash \mathbf{AD}_{<\zeta}, \mathbf{T}_{<\zeta}) \neq \emptyset$.
-
  - $\mathbf{prereq}(\mathcal{D}_\zeta) \in \mathbf{T}_{<\zeta}$,
  - $\mathbf{AD}_{<\zeta} = \{\mathbf{d}_\alpha : \alpha < \zeta\}$,
  - $\mathbf{AD}_\zeta = \{\mathbf{d}_\alpha : \alpha \preceq \zeta\}$.
-
  - $\forall\, \beta \in \mathcal{J}(\mathcal{D}_\zeta) : \ \neg\beta \notin \mathbf{T}_{<\zeta}$,
  - $\mathbf{d}_\zeta \in \mathbf{GD}(\mathcal{D} \backslash \mathbf{AD}_{<\zeta}, \mathbf{T}_{<\zeta})$.
- $\mathbf{GD}(\mathcal{D} \backslash \mathbf{AD}_\preceq, \mathbf{T}_\preceq) = \emptyset$.

Beispiel 2.3.20 (Illustration des Algorithmus)
Sei $\mathcal{D} :=_{\mathbf{def}} \{\frac{\emptyset : \neg \mathbf{p}}{\mathbf{p}}\}$, $\mathbf{W} :=_{\mathbf{def}} \emptyset$. *Es ergibt sich* $\mathbf{AD}_\preceq = \mathcal{D}$, $\gamma = 0$. *Der obige Algorithmus liefert uns also* $\mathbf{T} = \mathbf{Cn}(\mathbf{W} \cup \{\mathbf{p}\})$, *dies ist aber keine Extension! Der Algorithmus ist daher noch nicht einmal korrekt!*

Das letzte Beispiel lehrt uns, daß wir Kriterien zur Berechnung korrekter Extensionen benötigen.

Wir hatten früher schon einer Menge von j-freien Defaults die Menge $\mathbf{D_{mon}}$ der von ihnen induzierten monotonen Inferenzregeln zugeordnet. Wir tun dies nun für beliebige Defaults, indem wir die Rechtfertigungen einfach vergessen: Für eine Menge von Defaults $\mathcal{D}$ sei

$$\mathbf{Mon}(\mathcal{D}) :=_{\mathbf{def}} \{\frac{\mathbf{prereq}(\mathbf{d})}{\mathbf{concl}(\mathbf{d})} : \ \mathbf{d} \in \mathcal{D}\}.$$

Lemma 2.3.21
Es gilt $\mathbf{Cn}^{\mathbf{Mon}(\mathbf{AD}_{\preceq})}(\mathbf{W}) = \mathbf{T}_{\preceq}$.

Die nächsten beiden Theoreme sind die Hauptergebnisse dieses Kapitels. Sie zeigen, unter welcher hinreichenden Bedingung unser Algorithmus korrekt ist und daß er vollständig ist. Die relativ komplizierten und langwierigen Beweise kann man in [MT93, Kapitel 3, Abschnitt 3.7] nachlesen.

Theorem 2.3.22 (Kriterium für $\mathbf{T}_{\preceq}$, Korrektheit des Algorithmus)
Gilt die folgende Bedingung

$$(\ddagger) \qquad \forall \beta \in \mathcal{J}(\mathbf{AD}_{\preceq}) : \ \mathbf{W} \cup \mathbf{Concl}(\mathbf{AD}_{\preceq}) \not\vdash \neg\beta,$$

dann ist $\mathbf{T}_{\preceq}$ *eine Extension von* $(\mathbf{W}, \mathcal{D})$.

Theorem 2.3.23 (Vollständigkeit des Algorithmus)
Ist $\mathbf{E}$ *eine Extension von* $(\mathbf{W}, \mathcal{D})$ *dann gibt es eine Wohlordnung* $\preceq$ *auf* $\mathcal{D}$ *so daß:*

- $\mathbf{E}$ *ist erzeugt von* $\preceq$,
- $\mathbf{AD}_{\preceq}$ *erfüllt die Bedingung* $(\ddagger)$ *aus Theorem 2.3.22.*

Bisher haben wir ganz allgemeine Defaults $\frac{\alpha:\beta}{\gamma}$ betrachtet. Von besonderem Interesse sind aber eingeschränkte DL-Theorien. So betrachtet man etwa seminormale Defaults: Dies sind solche, für die $\beta \to \gamma$ gilt. Noch einschränkender ist die Forderung nach normalen Defaults. Diese behandeln wir im nächsten Abschnitt.

Der Begriff der Extension definiert in natürlicher Weise auch eine Ableitungsrelation $(\mathbf{W}, \mathcal{D}) \vdash_{\mathbf{DL}} \phi$, nämlich

$$(\mathbf{W}, \mathcal{D}) \vdash_{\mathbf{DL}} \phi \ \ :\Longleftrightarrow_{\mathbf{def}} \quad \phi \text{ gilt in allen Extensionen } \mathbf{E} \text{ von } (\mathbf{W}, \mathcal{D}).$$

Diesen Folgerungsbegriff nennt man *skeptisch*, da man den Durchschnitt aller Extensionen betrachtet. Es gibt auch den *gutgläubigen* Ansatz: Dort ist eine Formel schon dann ableitbar, wenn sie in irgendeiner Extension gilt. Man beachte, daß im gutgläubigen Ansatz sehr wohl sowohl eine Formel ϕ wie auch ihre Negation $\neg\phi$ herleitbar sein kann. Dies ist in Beispiel 1.4.2 der Fall, denn in einer Extension gilt **pacifist** und in der anderen $\neg$**pacifist**.

2.4 Normale Default Theorien

Definition 2.4.1 (Normaler Default)
Ein Default der Form $\frac{\alpha:\beta}{\beta}$ *heißt normal.*

Das folgende Lemma und die beiden Theoreme zeigt man unter Benutzung unserer Haupttheoreme 2.3.22 und 2.3.23.

Lemma 2.4.2
Sei $(\mathbf{W}, \mathcal{D})$ *normal und* $\preceq$ *eine Wohlordnung auf* $\mathcal{D}$.

1. *Ist* $\mathbf{W}$ *inkonsistent, dann gilt* $\gamma = 0$, *d.h.* $\mathbf{AD}_{\preceq} = \emptyset$.
2. *Ist* $\mathbf{W}$ *konsistent, dann auch* $\mathbf{W} \cup \mathbf{Concl}(\mathbf{AD}_{\preceq})$.

Theorem 2.4.3 (Charakterisierung von Extensionen normaler DL)
Sei $(\mathbf{W}, \mathcal{D})$ *normal. Für jede Wohlordnung* $\preceq$ *auf* $\mathcal{D}$ *ist die von* $\preceq$ *erzeugte Theorie* $\mathbf{Cn}(\mathbf{W} \cup \mathbf{Concl}(\mathbf{AD}_{\preceq}))$ *eine Extension von* $(\mathbf{W}, \mathcal{D})$. *Außerdem gilt:*

$$\mathbf{AD}_{\preceq} = \mathbf{GD}(\mathcal{D}, \mathbf{Cn}(\mathbf{W} \cup \mathbf{Concl}(\mathbf{AD}_{\preceq}))).$$

Jede Extension von $(\mathbf{W}, \mathcal{D})$ *ist von dieser Form.*

Theorem 2.4.4 (Eigenschaften normaler DL-Theorien)
Sei $(\mathbf{W}, \mathcal{D})$ *normal. Es gilt:*

1. **Existenz:** $(\mathbf{W}, \mathcal{D})$ *normal besitzt mindestens eine Extension.*
2. **Orthogonalität:** *Sind* $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ *verschiedene Extensionen von* $(\mathbf{W}, \mathcal{D})$ *dann ist* $\mathbf{E}_1 \cup \mathbf{E}_2$ *inkonsistent.*
3. **Semi-Monotonie:** *Für jede Extension* $\mathbf{E}_1$ *von* $(\mathbf{W}, \mathcal{D}_1)$ *gibt es eine Extension* $\mathbf{E}_2$ **von** $(\mathbf{W}, \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2)$: $\mathbf{E}_1 \subseteq \mathbf{E}_2$.

2.5 Einige Spezialfälle der Default-Logik

Wir zeigen im folgenden, daß sich die beiden in Kapitel 1, Abschnitt 1.5 vorgestellten Ansätze als spezielle Default-Theorien ergeben. Für den ersten Ansatz, die CWA, ist das sehr einfach zu sehen. Für den zweiten Ansatz, den maximal konsistenten Teilmengen-Ansatz, ergibt sich dies aus einem noch allgemeineren Resultat. Dieser Ansatz ist nämlich ein Spezialfall der sogenannten *Poole-Theorien mit Constraints*.

2.5.1 CWA als normale DL

Definition 2.5.1 (CWA $\mapsto$ DL)
Jedem $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}$ *(also einer Teilmenge der aussagenlogischen Konstanten* $\mathcal{AT}$*) ordnen wir die folgende Menge von Defaults zu:*

$$\mathcal{D}_{\mathbf{CWA}^{\mathcal{A}}} :=_{\mathbf{def}} \{\frac{\emptyset : \neg\mathbf{a}}{\neg\mathbf{a}} : \mathbf{a} \in \mathcal{A}\}.$$

Theorem 2.5.2 (CWA ist eine spezielle normale DL)
Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}$, dann sind für jede Theorie $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{Fml}_{\mathcal{L}}$ äquivalent

- $\mathbf{CWA}^{\mathcal{A}}(\mathbf{W})$ *ist konsistent,*
- $(\mathbf{W}, \mathcal{D}_{\mathbf{CWA}^{\mathcal{A}}})$ *besitzt genau eine konsistente Extension.*

Es gilt ferner, daß diese eindeutig bestimmte Extension genau $\mathbf{CWA}^{\mathcal{A}}(\mathbf{W})$ *ist.*

2.5.2 Der Ansatz von Poole

Ein ganz anderer Weg, mit Default-Wissen umzugehen, wurde von Poole in [Poo88] beschritten. Pooles Ansatz bleibt in der Prädikatenlogik und benutzt keine zusätzlichen Inferenzregeln. Die zugrundeliegende Semantik ist einleuchtender und Pooles Methode verhält sich an einigen Beispielen besser als Reiters Default-Logik. Pooles Methode wird daher als eine Verbesserung eines Teils der Default-Logik angesehen.

Wir werden im folgenden zeigen, daß es eine natürliche Abbildung von der Klasse der Poole-Theorien auf eine Teilklasse der *seminormalen p-freien* Default-Theorien derart gibt, daß die Poole-Extensionen genau mit den Reiter-Extensionen der zugeordneten Theorie übereinstimmen.

Definition 2.5.3 (Poole-Extensionen)
Eine Poole-Theorie mit Constraints ist ein Tripel (W,D,K) wobei

1. *W ist eine Menge geschlossener Formeln, die Menge der* Fakten*,*
2. *D ist eine Menge geschlossener Formeln, die Menge der* Defaults*, und*
3. *K ist eine Menge geschlossener Formeln, die Menge der* Constraints*,*

- *Falls K=∅, heißt (W,D,∅) ein Poole-System ohne Constraints.*
- $\mathbf{E}$ *ist eine* Poole-Extension *von (W,D,K)* <u>gdw</u> $\mathbf{E}$ *hat die Form Cn(*$W \cup \mathbf{D}_0$*), wobei* $\mathbf{D}_0$ maximal *unter den Teilmengen* $\mathbf{D}'$ *von D ist, so daß* $W \cup \mathbf{D}' \cup K$ *konsistent ist.*

Poole-Theorien ohne Constraints entsprechen also genau dem maximal-konsistenten Teilmengen-Ansatz aus Kapitel 1.

Wir ordnen nun jeder Poole-Theorie mit einer endlichen Menge von Constraints eine gewisse Default-Theorie zu. Diese Abbildung ist definiert durch

$$(\mathbf{W}, \mathbf{D}, \mathbf{K}) \leadsto (\mathbf{W}, \mathcal{D}) \ \text{ mit } \ \mathcal{D} :=_{\mathbf{def}} \{ \frac{\emptyset : \mathbf{K} \wedge \mathbf{d}}{\mathbf{d}} : \ \mathbf{d} \in \mathbf{D} \}.$$

$\mathbf{K} \wedge \mathbf{d}$ steht hier für die Konjunktion aller Elemente aus $\mathbf{K} \cup \{\mathbf{d}\}$. Wir nennen die Klasse aller Default-Theorien, die wir auf diese Weise erreichen, p-freie Default-Theorien vom *Poole-Typ*. Diese Definition macht aber auch Sinn, wenn wir Vorbedingungen zulassen. Es stellt sich heraus, daß die auf diese Weise erhaltene Klasse von Default-Theorien einige wichtige Eigenschaften mit der Klasse der normalen Default-Theorien teilt. Wir definieren daher:

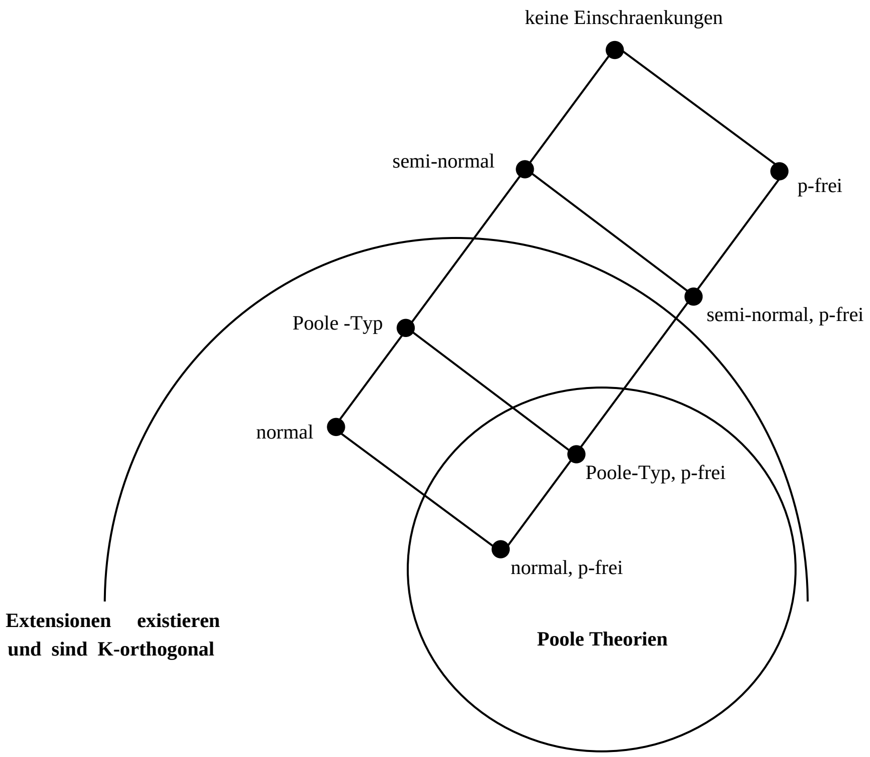

Abbildung 2.1: Teilsysteme der Default-Logik

Definition 2.5.4 (Default-Theorien vom Poole-Typ)
Eine Default-Theorie ist vom Poole-Typ*, falls deren Menge von Defaults die folgende Form hat:*

$$\{\frac{\alpha : \mathbf{K} \wedge \mathbf{d}}{\mathbf{d}} : \ \mathbf{d} \in \mathbf{D}, \ \alpha \in \mathbf{A}\}$$

für gewisse Mengen K, A und D von geschlossenen Formeln.

Eine Theorie vom Poole-Typ ist also immer seminormal und kann Vorbedingungen enthalten. Der Unterschied zu beliebigen seminormalen Default-Theorien ist sehr wichtig: dort können Defaults als $\frac{\phi: \mathbf{K} \wedge \mathbf{d}}{\mathbf{d}}$ mit *variablem* $\mathbf{K}$ geschrieben werden. Bei Theorien vom Poole-Typ ist die Menge $\mathbf{K}$ festgelegt: Jede Regel enthält dasselbe $\mathbf{K}$!

Um den Zusammenhang mit Reiters-Extensionen anzugeben, bestimmen wir zunächst die Extensionen von *p-freien* Default-Theorien, also Defaults ohne Vorbedingungen:

Lemma 2.5.5 (Extensionen für p-freie DL)
Sei (W,$\mathcal{D}$) eine p-freie DL Theorie mit Cn(W) konsistent.
Die Extensionen von (W,$\mathcal{D}$) sind die Mengen

$$\mathbf{E}_{\mathcal{D}'} :=_{\mathbf{def}} \mathbf{Cn}(\mathbf{W} \cup \mathbf{Concl}(\mathcal{D}')),$$

wobei $\mathcal{D}' \subseteq \mathcal{D}$ den folgenden Bedingungen genügt:

(1) für alle $\frac{\emptyset : \mathbf{j}}{\mathbf{c}} \in \mathcal{D}'$: $\mathbf{W} \cup \mathbf{Concl}(\mathcal{D}') \cup \{\mathbf{j}\}$ ist konsistent und

(2) für alle $\frac{\emptyset : \mathbf{j}}{\mathbf{c}} \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}'$: $\mathbf{Cn}(\mathbf{W} \cup \mathbf{Concl}(\mathcal{D}')) \models \neg\mathbf{j}$.

Beweis: Durch die Definition von Γ und unserer obigen Konstruktion (beide Eigenschaften (1) und (2) werden benötigt) gilt:

$$\Gamma(\mathbf{Cn}(\mathbf{W} \cup \mathbf{Concl}(\mathcal{D}'))) \subseteq \mathbf{Cn}(\mathbf{W} \cup \mathbf{Concl}(\mathcal{D}'))$$

und (nur die Eigenschaft (1) ausnutzend)

$$\Gamma(\mathbf{Cn}(\mathbf{W} \cup \mathbf{Concl}(\mathcal{D}'))) \supseteq \mathbf{Cn}(\mathbf{W} \cup \mathbf{Concl}(\mathcal{D}')).$$

Daher sind die $\mathbf{E}_{\mathcal{D}'}$ also tatsächlich Extensionen von (W,$\mathcal{D}$).

Wir haben noch zu zeigen, daß dies die einzigen sind. Sei also $\mathbf{E}$ eine Extension. Offenbar gilt:

$$\Gamma(\mathbf{E}) \subseteq \mathbf{Cn}(\mathbf{W} \cup \mathbf{Concl}(\mathbf{GD}(\mathcal{D}, \mathbf{E}))) \subseteq \mathbf{E}$$

so daß, da $\mathbf{E}$ eine Extension ist, $\Gamma(\mathbf{E}) = \mathbf{Cn}(\mathbf{W} \cup \mathbf{Concl}(\mathbf{GD}(\mathcal{D}, \mathbf{E}))) = \mathbf{E}$. Die Bedingungen (1) und (2) sind offenbar erfüllt. ∎

Wir bestimmen nun die Extensionen von p-freien Default-Theorien vom Poole-Typ:

Korollar 2.5.6 (Extensionen von p-freien Theorien vom Poole-Typ)

a) Sei (W,$\mathcal{D}$) eine p-freie Default-Theorie vom Poole-Typ, i.e. es gibt Mengen K und D von geschlossenen Formeln, so daß $\mathcal{D} = \{\frac{\emptyset : \mathbf{K} \wedge \mathbf{d}}{\mathbf{d}} : \mathbf{d} \in \mathbf{D}\}$.
Die Extensionen von (W,$\mathcal{D}$) sind genau die konsistenten Mengen

$$\mathbf{E}_{\mathcal{D}'} :=_{\mathbf{def}} \mathbf{Cn}(\mathbf{W} \cup \mathbf{Concl}(\mathcal{D}')),$$

die maximal sind: $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}'' \subseteq \mathcal{D} \implies \mathbf{W} \cup \mathbf{K} \cup \mathbf{Concl}(\mathcal{D}'')$ ist inkonsistent.

b) Sei (W,$\mathcal{D}$) eine normale, p-freie Default-Theorie.
Die Extensionen von (W,$\mathcal{D}$) sind genau die konsistenten Mengen

$$\mathbf{E}_{\mathcal{D}'} :=_{\mathbf{def}} \mathbf{Cn}(\mathbf{W} \cup \mathbf{Concl}(\mathcal{D}')),$$

die maximal sind: $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}'' \subseteq \mathcal{D} \implies \mathbf{W} \cup \mathbf{Concl}(\mathcal{D}'')$ ist inkonsistent.

Mit diesem Korollar erhalten wir sofort zwei wichtige Eigenschaften von p-freien Default-Theorien vom Poole-Typ, die für beliebige normale Default-Theorien wohlbekannt sind (siehe Theorem 2.4.4):

- *Existenz:* Jede p-freie Theorie vom Poole-Typ besitzt eine Extension und
- *Orthogonalität:* Je zwei Extensionen $\mathbf{E}$ und $\mathbf{E}'$ sind mit $\mathbf{K}$ zusammen inkonsistent.

Diese Beobachtungen gelten auch für die größere Klasse beliebiger (p-frei oder nicht) Theorien vom Poole-Typ:

Theorem 2.5.7 (Eigenschaften von Theorien vom Poole-Typ)
Default-Theorien vom Poole-Typ sind semimonoton, i.e. das Hinzufügen neuer Defaults zerstört keine Extensionen. Diese Theorien besitzen daher immer Extensionen. Außerdem sind je zwei Extensionen $\mathbf{E}$ *und* $\mathbf{E}'$ *mit* $\mathbf{K}$ *zusammen inkonsistent (*K-Orthogonalität*).*

Für den Beweis verweisen wir auf [Dix92].

Mit Hilfe des Lemmas 2.5.5 und Korollars 2.5.6 und unserer Abbildung

$$(\mathbf{W}, \mathbf{D}, \mathbf{K}) \rightsquigarrow (\mathbf{W}, \mathcal{D}) \ \text{ mit } \ \mathcal{D} :=_{\mathbf{def}} \{\frac{\emptyset : \mathbf{K} \wedge \mathbf{d}}{\mathbf{d}} : \ \mathbf{d} \in \mathbf{D}\}$$

sind wir in der Lage, Poole-Theorien mit p-freien Default-Theorien vom Poole-Typ zu identifizieren:

Theorem 2.5.8 (Poole-Theorien sind p-freie DLs vom Poole-Typ)

a) *Die Abbildung* $(\mathbf{W}, \mathbf{D}, \mathbf{K}) \rightsquigarrow (\mathbf{W}, \mathcal{D})$ *bildet Poole-Theorien mit Constraints auf p-freie Default-Theorien vom Poole-Typ ab. Die Poole-Extensionen von* $(\mathbf{W}, \mathbf{D}, \mathbf{K})$ *sind genau die Reiter-Extensionen der zugeordneten Default-Theorie.*

b) *Die Abbildung* $(\mathbf{W}, \mathbf{D}, \emptyset) \rightsquigarrow (\mathbf{W}, \mathcal{D})$ *bildet Poole-Theorien ohne Constraints auf normale p-freie Default-Theorien vom Poole-Typ ab. Die Poole-Extensionen von* $(\mathbf{W}, \mathbf{D}, \emptyset)$ *sind genau die Reiter-Extensionen der zugeordneten Default-Theorie.*

2.6 Probleme mit DL

Wir wollen auch auf folgende Schwierigkeiten und Nachteile der Default Logik aufmerksam machen.

Defaults gehören nicht zur Objektsprache: In DL kann man nicht Defaults selbst ableiten — sie gehören ja nicht zur Objektsprache. Man kann z.B. konsistent beide Defaults $\frac{\emptyset:\mathbf{p}}{\mathbf{p}}$ $\frac{\emptyset:\neg\mathbf{p}}{\neg\mathbf{p}}$ zugleich annehmen. In [Sch90a] und [Bre92] wird versucht, Defaults in die Objektsprache aufzunehmen.

Normale DL reicht nicht aus: Obwohl normale DL-Theorien schöne strukturelle Eigenschaften haben, sind sie für viele Anwendungen zu schwach. Um etwa Prioritäten auszudrücken, braucht man mindestens seminormale Defaults. Wir betrachten hierzu das Beispiel aus Abbildung 2.2.

Abbildung 2.2: "Tweety" und "Student/Erwachsener"

1. Studenten sind normalerweise nicht verheiratet.
2. Studenten sind normalerweise Erwachsene.
3. Erwachsene sind normalerweise verheiratet.
4. Fred ist ein Student.

Die direkteste Umsetzung in DL ist die folgende

$$\frac{\mathbf{stud.} : \neg\mathbf{verh.}}{\neg\mathbf{verh.}}, \frac{\mathbf{stud.} : \mathbf{erw.}}{\mathbf{erw.}}, \frac{\mathbf{erw.} : \mathbf{verh.}}{\mathbf{verh.}}$$

zusammen mit dem Faktum **stud**. Hier gibt es allerdings zwei Extensionen — in einer gilt **verh**. in der anderen gilt $\neg$**verh**. Intuitiv wollen wir aber, daß Fred nicht verheiratet ist, da die spezifischere Information (**stud.**) die allgemeinere (**erw.**) überschreiben soll. Dies können wir wie folgt erreichen:

$$\frac{\mathbf{stud.} : \neg\mathbf{verh.}}{\neg\mathbf{verh.}}, \frac{\mathbf{stud.} : \mathbf{erw.}}{\mathbf{erw.}}, \frac{\mathbf{erw.} : \neg\,\mathbf{stud.} \wedge \mathbf{verh.}}{\mathbf{verh.}}$$

zusammen mit dem Faktum **stud**. Nun gibt es nur die gewünschte Extension.

Seminormale Defaults können also genutzt werden, um Prioritäten zu codieren: Semi monotone Varianten von DL können keine Prioritäten ausdrücken.

Auch seminormale DL ist zu schwach: Man hat i.A. keine Konsistenz einer Extension mit der Rechtfertigung ihrer erzeugenden Defaults. In Beispiel 1.4.4 erhalten wir immer noch eine Extension, in der beide Arme benutzbar sind: Für $\mathbf{W} :=_{\mathbf{def}} \{\mathbf{broken(l)} \vee \mathbf{broken(r)}\}$ und

$$\mathcal{D} :=_{\mathbf{def}} \{\frac{\emptyset : \mathbf{useable(l)} \wedge \neg\mathbf{broken(l)}}{\mathbf{useable(l)}}, \{\frac{\emptyset : \mathbf{useable(r)} \wedge \neg\mathbf{broken(r)}}{\mathbf{useable(r)}}\}$$

gibt es genau eine Extension, nämlich

$$\mathbf{Cn}(\{\mathbf{broken}(\mathbf{l}) \vee \mathbf{broken}(\mathbf{r}), \mathbf{useable}(\mathbf{l}), \mathbf{useable}(\mathbf{r})\}).$$

Auch für seminormale DL kann es keine Extensionen geben:

Beispiel 2.6.1
Die Default Theorie $(\mathbf{W}, \mathcal{D})$ *mit* $\mathbf{W} = \emptyset$ *und*

$$\mathcal{D} :=_{\mathbf{def}} \{\frac{\emptyset : \mathbf{p} \wedge \neg \mathbf{q}}{\mathbf{p}}, \frac{\emptyset : \mathbf{q} \wedge \neg \mathbf{r}}{\mathbf{q}}, \frac{\emptyset : \mathbf{r} \wedge \neg \mathbf{p}}{\mathbf{r}}\}$$

besitzt keine Extensionen.

Kapitel 3

Circumscription (CIRC)

In diesem Kapitel lernen wir eine weitere nichtmonotone Logik kennen, die Circumscription. Sie ist näher an der klassischen Prädikatenlogik, da sie keine neuen Inferenzregeln braucht und vollständig in der Sprache der Prädikatenlogik formuliert werden kann. Die Idee ist, daß man einer Theorie $\mathbf{T}$ eine neue Theorie $\mathbf{Circum}(\mathbf{T})$ zuordnet. Die nichtmonotonen Folgerungen aus der ursprünglichen Theorie $\mathbf{T}$ werden dann definiert als die klassischen (bezüglich der Prädikatenlogik) Folgerungen aus $\mathbf{Circum}(\mathbf{T})$. Sätze aus $\mathbf{Circum}(\mathbf{T})$ abzuleiten ist natürlich eine monotone Angelegenheit. Die Nichtmonotonie steckt in der Konstruktion von $\mathbf{Circum}(\mathbf{T})$ aus $\mathbf{T}$.

In Abschnitt 3.1 geben wir eine kurze Einführung in die Prädikatenlogik erster Stufe. Wir stellen auch kurz die Erweiterung zur Logik zweiter Stufe dar. In Abschnitt 3.2 stellen wir die Grundidee der Circumscription vor. Schließlich geben wir in Abschnitt 3.3 eine ausführliche Darstellung der parallelen Prädikatscircumscription. Abschnitt 3.4 stellt eine Erweiterung der parallelen Circumscription dar, die Prioritäts-Circumscription. Probleme des Circumscriptions-Ansatzes diskutieren wir in Abschnitt 3.5. Schließlich stellen wir das berühmte Yale-Shooting-Problem in Abschnitt 3.6 vor.

3.1 Syntax und Semantik der Prädikatenlogik

Die Prädikatenlogik ist eine Erweiterung der Aussagenlogik. Was hinzukommt sind Quantoren, Funktions- und Prädikatssymbole.

Definition 3.1.1 (Prädikatenlogik 1. Stufe $\mathcal{L}_{\mathbf{PL}\,1}$, Sprache $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{PL}\,1}$)
Die Sprache $\mathcal{L}_{\mathbf{PL}\,1}$ der Prädikatenlogik erster Stufe besteht aus

- $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_\mathbf{n}, \ldots$*: einer abzählbaren Menge $\mathcal{VAR}$ von Variablen,*
- *für jedes $\mathbf{k} \in \mathbb{N}$: $\mathbf{P}^\mathbf{k}_1, \mathbf{P}^\mathbf{k}_2, \ldots, \mathbf{P}^\mathbf{k}_\mathbf{n}, \ldots$ einer abzählbaren Menge $\mathcal{PRED}^\mathbf{k}$ von k-stelligen Prädikatssymbolen*[1]*,*

[1]Die 0-stelligen Prädikatssymbole sind gerade die aussagenlogischen Konstanten aus $\mathcal{AT}$ von

- *für jedes* $\mathbf{k} \in \mathbb{N}$*:* $\mathbf{f}_1^{\mathbf{k}}, \mathbf{f}_2^{\mathbf{k}}, \ldots, \mathbf{f}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{k}}, \ldots$ *einer abzählbaren Menge* $\mathcal{FUNCT}^{\mathbf{k}}$ *von k-stelligen Funktionssymbolen,*
- $\neg$, $\wedge$, $\vee$*: den Junktoren (*$\neg$ *ist einstellig, alle anderen zweistellig),*
- $($, $)$*: den Klammern,*
- $\forall$, $\exists$*: den Quantoren.*

0-stellige Funktionssymbole heißen Individuen-Konstanten, wobei wir die Klammern weglassen. Im allgemeinen werden wir, wie in der Aussagenlogik auch, nur eine gewisse Teilmenge der Prädikats- bzw. Funktionssymbole benötigen. Diese legen eine Sprache $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{PL}\,1}$ *fest (analog zu Definition 2.1.1 in Kapitel 2). Die zugrundeliegende Menge der Funktions- und Prädikatssymbole bezeichnet man auch als Signatur* Σ*. Daraus ergeben sich induktiv der Begriff des* $\mathcal{L}$*-Termes* $\mathbf{t}$ *und der* $\mathcal{L}$*-Formel* φ*:*

Term: $\mathcal{L}$*-Terme* $\mathbf{t}$ *sind induktiv wie folgt definiert:*

1. *Jede Variable ist ein* $\mathcal{L}$*-Term.*
2. *Falls* $\mathbf{f}^{\mathbf{k}}$ *ein Funktionssymbol mit Stelligkeit* $\mathbf{k}$ *aus* $\mathcal{L}$ *ist und* $\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_{\mathbf{k}}$ $\mathcal{L}$*-Terme, so ist auch* $\mathbf{f}^{\mathbf{k}}(\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_{\mathbf{k}})$ *ein* $\mathcal{L}$*-Term.*

Die Menge aller $\mathcal{L}$*-Terme die man mit einer Menge* $\mathbf{X} \subseteq \mathcal{VAR}$ *bilden kann bezeichnen wir mit* $\mathbf{Term}_{\mathcal{L}}(\mathbf{X})$ *oder mit* $\mathbf{Term}_{\Sigma}(\mathbf{X})$*. Für* $\mathbf{X} = \emptyset$ *erhalten wir die Menge der Grundterme* $\mathbf{Term}_{\mathcal{L}}(\emptyset)$ *oder kurz* $\mathbf{Term}_{\mathcal{L}}$*.*

Formel: $\mathcal{L}$*-Formeln* φ *sind ebenfalls induktiv definiert:*

1. *Falls* $\mathbf{P}^{\mathbf{k}}$ *ein Prädikatssymbol mit Stelligkeit* $\mathbf{k}$ *aus* $\mathcal{L}$ *ist und* $\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_{\mathbf{k}}$ $\mathcal{L}$*-Terme, dann ist* $\mathbf{P}^{\mathbf{k}}(\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_{\mathbf{k}})$ *eine* $\mathcal{L}$*-Formel.*
2. *Für jede* $\mathcal{L}$*-Formel* φ *ist auch* $(\neg\varphi)$ *eine* $\mathcal{L}$*-Formel.*
3. *Für alle* $\mathcal{L}$*-Formeln* φ *und* ψ *sind auch* $(\varphi \wedge \psi)$ *und* $(\varphi \vee \psi)$ $\mathcal{L}$*-Formeln.*
4. *Falls* $\mathbf{x}$ *eine Variable und* φ *eine* $\mathcal{L}$*-Formel, so sind auch* $(\exists\, \mathbf{x}\, \varphi)$ *und* $(\forall\, \mathbf{x}\, \varphi)$ $\mathcal{L}$*-Formeln.*

Atomare $\mathcal{L}$*-Formeln sind die, die gemäß 1. aufgebaut sind, wir bezeichnen sie mit* $\mathbf{At}_{\mathcal{L}}(\mathbf{X})$ *(*$\mathbf{X} \subseteq \mathcal{VAR}$*). Die Menge aller* $\mathcal{L}$*-Formeln bezüglich* $\mathbf{X}$ *bezeichnen wir mit* $\mathbf{Fml}_{\mathcal{L}}(\mathbf{X})$*.*

Positive Formeln, $\mathbf{Fml}^{+}_{\mathcal{L}}(\mathbf{X})$ *sind solche, die nur mittels* 1., 3. *und* 4. *gebildet werden.*

Falls φ *eine* $\mathcal{L}$*-Formel ist, die als Teil einer* $\mathcal{L}$*-Formel* ψ *auftritt, so heißt* φ *Teilformel von* ψ*.*

Definition 3.1.2 ($\mathcal{L}$**-Struktur** $\mathcal{A} = (\mathbf{U}_{\mathcal{A}}, \mathbf{I}_{\mathcal{A}})$**)**
Eine $\mathcal{L}$*-Struktur oder* $\mathcal{L}$*-Interpretation ist ein Paar* $\mathcal{A} :=_{\mathbf{def}} (\mathbf{U}_{\mathcal{A}}, \mathbf{I}_{\mathcal{A}})$*, wobei* $\mathbf{U}_{\mathcal{A}}$ *eine beliebige nicht leere Menge ist, die die Grundmenge (oder das Universum bzw. der Individuenbereich) von* $\mathcal{A}$ *genannt wird. Ferner ist* $\mathbf{I}_{\mathcal{A}}$ *eine Abbildung, die:*

$\mathcal{L}_{\mathbf{AL}}$. Wir setzen voraus, daß $\Box$ und $\top$ vorhanden sind.

- *jedem* $\mathbf{k}$*-stelligen Prädikatssymbol* $\mathbf{P^k}$ *aus* $\mathcal{L}$ *ein* $\mathbf{k}$*-stelliges Prädikat über* $\mathbf{U}_\mathcal{A}$ *zuordnet,*
- *jedem* $\mathbf{k}$*-stelligen Funktionssymbol* $\mathbf{f^k}$ *aus* $\mathcal{L}$ *eine* $\mathbf{k}$*-stellige Funktion auf* $\mathbf{U}_\mathcal{A}$ *zuordnet.*

Mit anderen Worten: Der Definitionsbereich von $\mathbf{I}_\mathcal{A}$ *ist gerade die Menge der Prädikats- und Funktionssymbole von* $\mathcal{L}$*. Der Wertebereich von* $\mathbf{I}_\mathcal{A}$ *besteht aus Prädikaten und Funktionen auf* $\mathbf{U}_\mathcal{A}$*. Wir schreiben:*

$$\mathbf{I}_\mathcal{A}(\mathbf{P}) = \mathbf{P}^\mathcal{A},\ \mathbf{I}_\mathcal{A}(\mathbf{f}) = \mathbf{f}^\mathcal{A}.$$

Sei φ *eine* $\mathcal{L}_1$*-Formel und* $\mathcal{A} :=_{\mathbf{def}} (\mathbf{U}_\mathcal{A}, \mathbf{I}_\mathcal{A})$ *eine* $\mathcal{L}$*-Struktur.* $\mathcal{A}$ *heißt zu* φ *passend, falls* $\mathbf{I}_\mathcal{A}$ *für alle in* φ *vorkommenden Prädikatssymbole und Funktionssymbole definiert ist, falls also* $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}$*.*

Im folgenden lassen wir den Index $\mathcal{L}$ *weg, wenn die zugrundeliegende Sprache aus dem Zusammenhang klar ersichtlich ist.*

Definition 3.1.3 (Variablenbelegung ϱ)
Eine Variablenbelegung ϱ *über einer* $\mathcal{L}$*-Struktur* $\mathcal{A} = (\mathbf{U}_\mathcal{A}, \mathbf{I}_\mathcal{A})$ *ist eine Funktion*

$$\varrho :\ \mathcal{VAR} \rightarrow \mathbf{U}_\mathcal{A};\ \mathbf{x} \mapsto \varrho(\mathbf{x}).$$

Definition 3.1.4 (Semantik der Prädikatenlogik)
Sei φ *eine Formel,* $\mathcal{A}$ *eine zu* φ *passende Struktur und* ϱ *eine Variablenbelegung über* $\mathcal{A}$*. Für jeden Term* $\mathbf{t}$*, den man aus den Bestandteilen von* φ *bilden kann, definieren wir nun induktiv den* Wert von $\mathbf{t}$ in der Struktur $\mathcal{A}$*, den wir mit* $\mathcal{A}(\mathbf{t})$ *bezeichnen.*

1. *Für eine Variable* $\mathbf{x}$ *ist* $\mathcal{A}(\mathbf{x}) :=_{\mathbf{def}} \varrho(\mathbf{x})$*.*
2. *Falls* $\mathbf{t}$ *die Form hat* $\mathbf{t} = \mathbf{f^k}(\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t_k})$*, wobei* $\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t_k}$ *Terme und* $\mathbf{f^k}$ *ein* $\mathbf{k}$*-stelliges Funktionssymbol ist, so ist* $\mathcal{A}(\mathbf{t}) :=_{\mathbf{def}} \mathbf{f}^\mathcal{A}(\mathcal{A}(\mathbf{t}_1), \ldots, \mathcal{A}(\mathbf{t_k}))$*.*

Nun definieren wir induktiv den Wahrheitswert einer Formel φ *in* $\mathcal{A}$*:*

1. *Falls* $\varphi :=_{\mathbf{def}} \mathbf{P^k}(\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t_k})$ *mit den Termen* $\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t_k}$ *und k-stelligem Prädikatssymbol* $\mathbf{P^k}$*, so ist*
$$\mathcal{A}(\varphi) :=_{\mathbf{def}} \begin{cases} \mathbf{t}, & \mathbf{falls}\, (\mathcal{A}(\mathbf{t}_1), \ldots, \mathcal{A}(\mathbf{t_k})) \in \mathbf{P}^\mathcal{A}, \\ \mathbf{f}, & \mathbf{sonst}. \end{cases}$$
2. *Falls* $\varphi :=_{\mathbf{def}} \neg\psi$*, so ist*
$$\mathcal{A}(\varphi) :=_{\mathbf{def}} \begin{cases} \mathbf{t}, & \mathbf{falls}\, \mathcal{A}(\psi) = \mathbf{f}, \\ \mathbf{f}, & \mathbf{sonst}. \end{cases}$$
3. *Falls* $\varphi :=_{\mathbf{def}} (\psi \wedge \eta)$*, so ist*
$$\mathcal{A}(\varphi) :=_{\mathbf{def}} \begin{cases} \mathbf{t}, & \mathbf{falls}\, \mathcal{A}(\psi) = \mathbf{t}\, \mathbf{und}\, \mathcal{A}(\eta) = \mathbf{t}, \\ \mathbf{f}, & \mathbf{sonst}. \end{cases}$$

4. *Falls* $\varphi :=_{\mathbf{def}} (\psi \vee \eta)$*, so ist*

$$\mathcal{A}(\varphi) :=_{\mathbf{def}} \begin{cases} \mathbf{t}, & \mathbf{falls}\, \mathcal{A}(\psi) = \mathbf{t}\, \mathbf{oder}\, \mathcal{A}(\eta) = \mathbf{t}, \\ \mathbf{f}, & \mathbf{sonst}. \end{cases}$$

5. *Falls* $\varphi :=_{\mathbf{def}} \forall\, \mathbf{x}\, \psi$*, so ist*

$$\mathcal{A}(\varphi) = \ :=_{\mathbf{def}} \begin{cases} \mathbf{t}, & \mathbf{falls}\, \textit{für}\, \mathbf{alle}\ \mathbf{d} \in \mathbf{U}_{\mathcal{A}} : \mathcal{A}_{[\mathbf{x}/\mathbf{d}]}(\psi) = \mathbf{t}, \\ \mathbf{f}, & \mathbf{sonst}. \end{cases}$$

6. *Falls* $\varphi :=_{\mathbf{def}} \exists\, \mathbf{x}\, \psi$*, so ist*

$$\mathcal{A}(\varphi) :=_{\mathbf{def}} \begin{cases} \mathbf{t}, & \mathbf{falls\ es\ gibt\ ein}\ \mathbf{d} \in \mathbf{U}_{\mathcal{A}} : \mathcal{A}_{[\mathbf{x}/\mathbf{d}]}(\psi) = \mathbf{t}, \\ \mathbf{f}, & \mathbf{sonst}. \end{cases}$$

In den Fällen 5. und 6. wurde die Notation $[\mathbf{x}/\mathbf{d}]$ *benutzt. Sie ist wie folgt definiert: Für* $\mathbf{d} \in \mathbf{U}_{\mathcal{A}}$ *sei* $\mathcal{A}_{[\mathbf{x}/\mathbf{d}]}$ *die Struktur* $\mathcal{A}'$*, die überall mit* $\mathcal{A}$ *identisch ist, bis auf die Definition von* $\mathbf{x}^{\mathcal{A}'}$*:* $\mathbf{x}^{\mathcal{A}'} :=_{\mathbf{def}} \mathbf{d}$ *(unabhängig davon, ob* $\mathbf{I}_{\mathcal{A}}$ *für* $\mathbf{x}$ *definiert ist oder nicht). Wir schreiben:*

- $\mathcal{A} \models \varphi[\varrho]$ *für* $\mathcal{A}(\varphi) = \mathbf{t}$*:* $\mathcal{A}$ *ist Modell für* φ *bezüglich* ϱ*.*
- *Enthält* φ *keine freien Variablen, so ist* $\mathcal{A} \models \varphi[\varrho]$ *unabhängig von* ϱ*. Wir lassen dann* ϱ *einfach weg.*
- *Falls es mindestens ein Modell für* φ *gibt, so heißt* φ *erfüllbar oder konsistent.*

Definition 3.1.5 (Tautologie)

1. *Eine Theorie ist eine Menge von Formeln ohne freie Variablen:* $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{Fml}_{\mathcal{L}}$*.* $\mathcal{A}$ *erfüllt* $\mathbf{T}$ *falls* $\mathcal{A} \models \varphi$ *für alle* $\varphi \in \mathbf{T}$*. Wir schreiben* $\mathcal{A} \models \mathbf{T}$*.*
2. *Eine* $\mathcal{L}$*-Formel* φ *heißt* $\mathcal{L}$*-Tautologie, falls für alle möglichen* $\mathcal{L}$*-Strukturen* $\mathcal{A}$ *gilt:* $\mathcal{A} \models \varphi$*.*

Im folgenden lassen wir die zugrundeliegende Sprache $\mathcal{L}$ meistens weg, da sie aus dem Zusammenhang klar ersichtlich ist. Trotzdem muß sie natürlich immer festgelegt sein.

Definition 3.1.6 (Folgerungsmenge $\mathbf{Cn(T)}$)
Eine Formel φ *folgt aus* $\mathbf{T}$*, falls für alle Strukturen* $\mathcal{A}$ *mit* $\mathcal{A} \models \mathbf{T}$ *auch* $\mathcal{A} \models \varphi$ *gilt. Dafür schreiben wir:* $\mathbf{T} \models \varphi$*.*

Wir bezeichnen mit $\mathbf{Cn}_{\mathcal{L}}(\mathbf{T}) :=_{\mathbf{def}} \{\varphi \in \mathbf{Fml}_{\mathcal{L}} : \mathbf{T} \models \varphi\}$*, oder einfach* $\mathbf{Cn(T)}$*, den semantischen Konsequenzoperator.*

Lemma 3.1.7 (Eigenschaften von $\mathbf{Cn(T)}$)
Der semantische Konsequenzoperator hat folgende Eigenschaften:

1. $\mathbf{T}$-Erweiterung: $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{Cn}(\mathbf{T})$,
2. Monotonie: $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{T}' \Rightarrow \mathbf{Cn}(\mathbf{T}) \subseteq \mathbf{Cn}(\mathbf{T}')$,
3. Abgeschlossenheit: $\mathbf{Cn}(\mathbf{Cn}(\mathbf{T})) = \mathbf{Cn}(\mathbf{T})$.

Lemma 3.1.8 ($\varphi \notin \mathbf{Cn}(\mathbf{T})$)
$\varphi \notin \mathbf{Cn}(\mathbf{T})$ $\underline{\text{gdw}}$ *es gibt eine Struktur* $\mathcal{A}$ *mit* $\mathcal{A} \models \mathbf{T}$ *und* $\mathcal{A} \models \neg\varphi$.

Definition 3.1.9 (MOD(T), Cn($\mathcal{U}$))
Ist $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{Fml}_{\mathcal{L}}$*, so bezeichnen wir mit* $MOD(\mathbf{T})$ *die Menge aller* $\mathcal{L}$*-Strukturen* $\mathcal{A}$ *die Modelle von* $\mathbf{T}$ *sind:*

$$MOD(\mathbf{T}) :=_{\mathbf{def}} \{\mathcal{A} : \mathcal{A} \models \mathbf{T}\}.$$

Ist $\mathcal{U}$ *eine Menge von Strukturen, so können wir alle Sätze betrachten, die in allen Strukturen gelten. Diese Menge bezeichnen wir ebenfalls mit* $\mathbf{Cn}(\mathcal{U})$*:*

$$\mathbf{Cn}(\mathcal{U}) :=_{\mathbf{def}} \{\varphi \in \mathbf{Fml}_{\mathcal{L}} : \forall \mathcal{A} \in \mathcal{U} : \mathcal{A} \models \varphi\}.$$

Offenbar ist MOD der zu **Cn** duale Begriff:

$$\mathbf{Cn}(\mathrm{MOD}(\mathbf{T})) = \mathbf{Cn}(\mathbf{T}), \quad \mathrm{MOD}(\mathbf{Cn}(\mathbf{T})) = \mathrm{MOD}(\mathbf{T}).$$

Definition 3.1.10 (Vollständigkeit einer Theorie T)
$\mathbf{T}$ *heißt vollständig, falls für jede Formel* $\varphi \in \mathbf{Fml}_{\mathcal{L}}$*:* $\mathbf{T} \models \varphi$ *oder* $\mathbf{T} \models \neg\varphi$.

Diese letzte Bedingung ist nicht zu verwechseln mit der entsprechenden Eigenschaft in einer Struktur: Jede Struktur hat natürlich diese Eigenschaft.

Lemma 3.1.11 (Ex Falso Quodlibet)
$\mathbf{T}$ *ist konsistent* $\underline{\text{gdw}}$ $\mathbf{Cn}(\mathbf{T}) \neq \mathbf{Fml}_{\mathcal{L}}$.

In Kapitel 2 haben wir einen zur Aussagenlogik $\mathcal{L}_{\mathbf{PL}\,1}$ korrekten und vollständigen Kalkül angegeben. Solche Kalküle gibt es auch für die gerade definierte Prädikatenlogik $\mathcal{L}_{\mathbf{PL}\,1}$.

Theorem 3.1.12 (Vollständigkeit der Prädikatenlogik)
Eine Formel folgt semantisch aus einer Theorie $\mathbf{T}$ *genau dann, wenn sie abgeleitet werden kann:*

$$\mathbf{T} \vdash \varphi \ \ \underline{\text{gdw}} \ \ \mathbf{T} \models \varphi$$

Theorem 3.1.13 (Kompaktheit der Prädikatenlogik)
Eine Formel folgt aus einer Theorie $\mathbf{T}$ *genau dann, wenn sie schon aus einer endlichen Teilmenge von* $\mathbf{T}$ *folgt:*

$$\mathbf{Cn}(\mathbf{T}) = \bigcup\{\mathbf{Cn}(\mathbf{T}') : \mathbf{T}' \subseteq \mathbf{T}, \mathbf{T}' \textit{ endlich}\}.$$

Wir haben in Kapitel 2 den AL-Kalkül benutzt (er wurde ja erweitert und modifiziert), um einen Kalkül für die Default Logik zu konstruieren. Für die Darstellung der Circumscription gehen wir einen anderen, sehr viel direkteren Weg. Wir ordnen nämlich einer Theorie $\mathbf{T}$ eine andere Theorie $\mathbf{Circum}(\mathbf{T})$ zu: $\mathbf{Circum}(\mathbf{T})$ ist ebenfalls eine Menge von Formeln aus $\mathcal{L}_{\mathbf{PL}\,1}$, die mit Hilfe von $\mathbf{T}$ konstruiert wird. Bei diesem Vorgehen brauchen wir den der Prädikatenlogik zugrundeliegenden Kalkül überhaupt nicht. Wir können aber immer sowohl semantisch (über die zugrundeliegenden Modelle) als auch syntaktisch (über die zugrundeliegenden Formelmengen) argumentieren, da wir wissen, daß ein korrekter und vollständiger Beweiskalkül für $\mathcal{L}_{\mathbf{PL}\,1}$ existiert.

Der in diesem Kapitel darzustellende Formalismus der Circumscription läßt sich sowohl in der Logik der ersten als auch in der der zweiten Stufe ausdrücken. Wir wollen hier keine erschöpfende Definition der zweiten Stufe Logik geben, aber kurz umreißen, wie man zur zweiten Stufe kommt.

Definition 3.1.14 (Logik 2. Stufe $\mathcal{L}_{\mathbf{PL}\,2}$)
Die Sprache $\mathcal{L}_{\mathbf{PL}\,2}$ der Prädikatenlogik zweiter Stufe besteht aus der Sprache $\mathcal{L}_{\mathbf{PL}\,1}$ und zusätzlich

- *für jedes $\mathbf{k} \in \mathbb{N}$: $\mathbf{X}_1^{\mathbf{k}}, \mathbf{X}_2^{\mathbf{k}}, \ldots, \mathbf{X}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{k}}, \ldots$ einer abzählbaren Menge $\mathcal{RELVAR}^{\mathbf{k}}$ von $\mathbf{k}$-stelligen Prädikatsvariablen.*

Dadurch vergrößert sich die Menge der Terme,

- *ist $\mathbf{X}^{\mathbf{k}}$ eine $\mathbf{k}$-stellige Prädikatsvariable und sind $\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_{\mathbf{k}}$ Terme, so ist auch $\mathbf{X}^{\mathbf{k}}(\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_{\mathbf{k}})$ ein Term,*

und auch die Menge der Formeln:

- *ist $\mathbf{X}$ eine Prädikatsvariable, φ eine Formel, so sind auch $(\exists \mathbf{X} \varphi)$ und $(\forall \mathbf{X} \varphi)$ Formeln.*

Man kann nun also nicht nur über Elemente des Individuenbereichs quantifizieren, sondern über beliebige Teilmengen, bzw. über beliebige $\mathbf{k}$-stellige Relationen. In der Semantik der Logik zweiter Stufe ändert sich fast nichts — es kommen lediglich zwei neue Dinge dazu (nämlich die Interpretation von Formeln der Art $(\exists \mathbf{X} \varphi)$, $(\forall \mathbf{X} \varphi)$). Außerdem verlangen wir von $\mathbf{I}_{\mathcal{A}}$ daß die neuen $\mathbf{k}$-stelligen Prädikatsvariablen auf $\mathbf{k}$-wertige Relationen auf $\mathbf{U}_{\mathcal{A}}$ abgebildet werden.

- *Falls $\varphi :=_{\mathbf{def}} \forall \mathbf{X}^{\mathbf{k}} \psi$, so ist*

$$\mathcal{A}(\varphi) :=_{\mathbf{def}} \begin{cases} \mathbf{t}, & \textit{falls für alle } \mathbf{R}^{\mathbf{k}} \subseteq \mathbf{U}_{\mathcal{A}} \times \cdots \times \mathbf{U}_{\mathcal{A}} : \ \mathcal{A}_{[\mathbf{X}^{\mathbf{k}}/\mathbf{R}^{\mathbf{k}}]}(\psi) = \mathbf{t}, \\ \mathbf{f}, & \mathbf{sonst}. \end{cases}$$

- *Falls $\varphi :=_{\mathbf{def}} \exists \mathbf{X}^{\mathbf{k}} \psi$, so ist*

$$\mathcal{A}(\varphi) :=_{\mathbf{def}} \begin{cases} \mathbf{t}, & \textit{falls es ein } \mathbf{R}^{\mathbf{k}} \subseteq \mathbf{U}_{\mathcal{A}} \times \cdots \times \mathbf{U}_{\mathcal{A}} \textit{ gibt mit } \mathcal{A}_{[\mathbf{X}^{\mathbf{k}}/\mathbf{R}^{\mathbf{k}}]}(\psi) = \mathbf{t}, \\ \mathbf{f}, & \mathbf{sonst}. \end{cases}$$

Man kann nun also über beliebige **n**-stellige Relationen des Individuenbereichs quantifizieren, nicht mehr nur über einzelne Elemente.

Während die Semantik von $\mathcal{L}_{\mathbf{PL}\,2}$ eine kanonische Erweiterung von $\mathcal{L}_{\mathbf{PL}\,1}$ ist, gilt dies nicht auf der Ebene der Kalküle. Man kann nämlich zeigen, daß die Menge der gültigen $\mathcal{L}_{\mathbf{PL}\,2}$ Sätze noch nicht einmal rekursiv aufzählbar ist. Es kann also gar keinen korrekten und vollständigen Kalkül für die Prädikatenlogik zweiter Stufe geben.

3.2 Motivation und Syntax der Circumscription

Die wesentliche Idee der Circumscription ist es, Fakten über die Welt als gewöhnliche Formeln (der Prädikatenlogik) auszudrücken, aber dann nicht Gültigkeit in allen Modellen, sondern nur in bestimmten Modellen zu betrachten. Und zwar in solchen, die gewisse Prädikate möglichst klein machen.

Wir veranschaulichen den allgemeinen Fall im nächsten Abschnitt. Eine Verfeinerung stellt die Hinzufügung neuer Prädikate und deren spezielle Behandlung im darauffolgenden Abschnitt dar.

3.2.1 Erster Ansatz

Betrachten wir uns unsere Datenbank über Flugverbindungen und Beispiel 1.4.1 aus Kapitel 1. Im ersten Beispiel haben wir die Theorie $\mathbf{T}_0$

$$\{\mathbf{flug}(\mathbf{M},\mathbf{B},9.00),\mathbf{flug}(\mathbf{M},\mathbf{B},12.00),\mathbf{flug}(\mathbf{M},\mathbf{B},15.00),\mathbf{flug}(\mathbf{M},\mathbf{B},18.00)\}$$

als gegebene Menge bezüglich einer zugrundeliegenden Sprache $\mathcal{L}$. Logisch kann aus dieser Menge nicht $\neg\mathbf{flug}(\mathbf{M},\mathbf{B},11.00)$ abgeleitet werden, da es ja ein Modell von $\mathbf{T}_0 \cup \{\mathbf{flug}(\mathbf{M},\mathbf{B},11.00)\}$ gibt. Fragen wir aber nach den *minimalen* Modellen von $\mathbf{T}_0$, also solchen, bei denen so wenig Instanzen von $\mathbf{flug}(\ ,\ ,\ )$ wie möglich gelten, kommen wir genau zu dem gewünschten Modell. Dieses stimmt mit $\mathbf{CWA}^{\mathcal{A}}(\mathbf{T}_0)$, wobei

$$\mathcal{A} :=_{\mathbf{def}} \{\mathbf{flug}(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2,\mathbf{t}_3) :\ \mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2,\mathbf{t}_3 \text{ sind } \mathcal{L}\text{-Terme}\}$$

überein. Wenn wir unser Tweety-Beispiel wie folgt formalisieren:

$$\mathbf{T}_1 :=_{\mathbf{def}} \{\mathbf{vogel}(\mathbf{tweety}),\ \forall\mathbf{x}\,(\mathbf{vogel}(\mathbf{x}) \land \neg\mathbf{pinguin}(\mathbf{x}) \longrightarrow \mathbf{fliegt}(\mathbf{x}))\},$$

und nach Modellen fragen, in denen die Extension von **pinguin** minimal ist, kommen wir auch zu den gewünschten Modellen.

3.2.2 Der ab-Formalismus

Wir haben diesen von McCarthy eingeführten Formalismus schon in Kapitel 1 benutzt. Er besteht darin, unter Zuhilfenahme von neuen Prädikaten, sogenannten Abnormalitäts-Prädikaten (siehe die Beispiele des Abschnitts 1.6 von Kapitel 1: Beispiele 1.4.1, 1.4.2, 1.4.3, 1.4.4) einen gegebenen Sachverhalt zu modellieren. Diese ab-Prädikate sollen im Normalfall nicht gelten, also nur Ausnahmefälle beschreiben:

- "**abnormal(aspekt, objekt)**": "**objekt**" ist abnormal bezüglich "**aspekt**".

Es geht also darum, abnormal-Prädikate zu minimieren. In unserem Tweety-Beispiel $\mathbf{T}_1$ aus dem vorigen Abschnitt würden wir also anstatt

$$\forall \mathbf{x}\,(\mathbf{vogel}(\mathbf{x}) \wedge \neg \mathbf{pinguin}(\mathbf{x}) \longrightarrow \mathbf{fliegt}(\mathbf{x})$$

die beiden Sätze

$$\forall \mathbf{x}\,(\mathbf{vogel}(\mathbf{x}) \wedge \neg \mathbf{ab}(\mathbf{x}) \longrightarrow \mathbf{fliegt}(\mathbf{x}))$$
$$\forall \mathbf{x}\,(\mathbf{pinguin}(\mathbf{x}) \longrightarrow \mathbf{ab}(\mathbf{x}))$$

benutzen und **ab** minimieren. Wir werden in den folgenden Abschnitten diese Idee präzisieren.

3.3 Parallele Prädikatscircumscription

Die parallele Prädikatscircumscription läßt sich sowohl semantisch, über minimale Modelle (Abschnitt 3.3.1), als auch axiomatisch, über gewisse Formelmengen, darstellen. Man kann sowohl Formeln der Prädikatenlogik 1. Stufe (Abschnitt 3.3.2) als auch solche der Logik 2. Stufe (Abschnitt 3.3.3) betrachten. Die engen Zusammenhänge dieser Varianten werden in Abschnitt 3.3.4 dargestellt. Schließlich gehen wir noch auf einige Varianten in Abschnitt 3.3.5 ein.

3.3.1 Minimale Modelle

Angenommen, wir haben einen Sachverhalt in der Prädikatenlogik 1. Stufe formalisiert. Wir können uns also eine Theorie Σ vorstellen, die gewisse ausgezeichnete Prädikate $\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P_n}$ und $\mathbf{Z}_1, \ldots, \mathbf{Z_m}$ benutzt. Im folgenden kürzen wir solche endlichen Mengen einfach durch $\underline{\mathbf{P}}$, $\underline{\mathbf{Z}}$ ab: $\Sigma = \Sigma(\underline{\mathbf{P}}; \underline{\mathbf{Z}})$. Die $\underline{\mathbf{P}}$ sind die zu minimierenden Prädikate (etwa die ab-Prädikate). In unserem Tweety Beispiel

$$\mathbf{T}_0 :=_{\mathbf{def}} \{\mathbf{vogel}(\mathbf{tweety}),\ \forall \mathbf{x}\ (\mathbf{vogel}(\mathbf{x}) \wedge \neg \mathbf{pinguin}(\mathbf{x}) \longrightarrow \mathbf{fliegt}(\mathbf{x}))\}$$

wäre also **pinguin** unter die **P** Prädikate aufzunehmen. In der **ab**-Formulierung:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{T}_1 :=_{\mathbf{def}} & \{ & \forall \mathbf{x}\,(\mathbf{vogel}(\mathbf{x}) \wedge \neg \mathbf{ab}_1(\mathbf{x}) \to \mathbf{fliegt}(\mathbf{x})), \\ & & \forall \mathbf{x}\,(\mathbf{pinguin}(\mathbf{x}) \to \mathbf{ab}_1(\mathbf{x})), \\ & & \forall \mathbf{x}\,(\mathbf{pinguin}(\mathbf{x}) \wedge \neg \mathbf{ab}_2(\mathbf{x}) \to \neg \mathbf{fliegt}(\mathbf{x})), \\ & & \mathbf{vogel}(\mathbf{tweety}) \ \ \} \\ & & \\ \mathbf{T}_2 :=_{\mathbf{def}} \mathbf{T}_1 \cup & \{ & \mathbf{pinguin}(\mathbf{tweety}) \ \ \} \end{array}$$

sind $\mathbf{ab}_1$ und $\mathbf{ab}_2$ die zu minimierenden Prädikate.

Sehr wichtig ist, daß während der Minimierung andere (geeignet ausgesuchte) Prädikate variieren und wieder andere fix bleiben können. Dies führt zu folgender

Definition 3.3.1 (Semantik)
Wir definieren eine Präordnung $<^{\underline{\mathbf{P}};\underline{\mathbf{Z}}}$ *zwischen Modellen* $\mathcal{W}_1$, $\mathcal{W}_2$ *der zugrundeliegenden Sprache:*

$\mathcal{W}_1 <^{\underline{\mathbf{P}};\underline{\mathbf{Z}}} \mathcal{W}_2 \quad :\Longleftrightarrow_{\mathbf{def}}$

1. *$\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2$ besitzen dasselbe Universum.*
2. *Alle Symbole, die von $\underline{P}$, $\underline{Z}$ verschieden sind, werden gleich interpretiert.*
3. *Für jedes $P_{\mathbf{i}}$: $\mathbf{P_i}^{\mathcal{W}_1} \subseteq \mathbf{P_i}^{\mathcal{W}_2}$.*

Wir schreiben dafür:

$$\Sigma \models_{\mathbf{circ}(\underline{\mathbf{P}};\underline{\mathbf{Z}})} \phi \quad :\Longleftrightarrow_{\mathbf{def}} \quad \phi \textit{ gilt in allen } <^{\underline{\mathbf{P}};\underline{\mathbf{Z}}}\textit{-minimalen Modellen von } \Sigma.$$

Die Relation $<^{\underline{\mathbf{P}};\underline{\mathbf{Z}}}$ ist reflexiv und transitiv, aber nicht antisymmetrisch und daher auch keine partielle Ordnung.

Was sind die minimalen Modelle von $\mathbf{T}_0$? Wenn wir **pinguin** minimieren, kommt es darauf an, ob wir **fliegt** unter die variierenden Prädikate **Z** aufnehmen oder nicht. Denn sowohl

$$\mathcal{W}_1 :=_{\mathbf{def}} \{\mathbf{vogel}(\mathbf{tweety}), \neg\mathbf{pinguin}(\mathbf{tweety}), \mathbf{fliegt}(\mathbf{tweety})\}$$

als auch

$$\mathcal{W}_2 :=_{\mathbf{def}} \{\mathbf{vogel}(\mathbf{tweety}), \mathbf{pinguin}(\mathbf{tweety}), \neg\mathbf{fliegt}(\mathbf{tweety})\}$$

sind beides $<^{\mathbf{pinguin};\emptyset}$-minimale Modelle. Das liegt daran, daß sie im Sinne der $<^{\mathbf{pinguin};\emptyset}$ Relation nicht vergleichbar sind! Tatsächlich liefert die Circumscription nichts Neues, wenn keine Prädikate variieren (siehe Abschnitt 3.5).

Betrachten wir aber $<^{\mathbf{pinguin};\mathbf{fliegt}}$-minimale Modelle, so gilt

$$\mathcal{W}_1 \;<^{\mathbf{pinguin};\mathbf{fliegt}}\; \mathcal{W}_2,$$

also erhalten wir das gewünschte Resultat.

Für das zweite Beispiel betrachten wir analog $\mathbf{T}_1$ bzw. $\mathbf{T}_2$ wobei $\mathbf{ab}_1$ und $\mathbf{ab}_2$ minimiert werden, während **fliegt** variiert. Auch hier erhalten wir die gewünschten Resultate — die $<^{\mathbf{ab}_1,\mathbf{ab}_2;\mathbf{fliegt}}$-minimalen Modelle sind gerade die intendierten.

Der in diesem Abschnitt dargestellte semantische Zugang ist sehr elegant, zeigt allerdings nicht, wie man Folgerungen mittels eines Kalküls wirklich herleiten kann. In den nächsten Abschnitten werden wir sehen, wie man Formeln, die in allen minimalen Modellen gelten, auch als Theorien der Prädikatenlogik 1. oder 2. Stufe darstellen kann.

3.3.2 Variable Circumscription, 1. Stufe

Intuitiv kann man die *"Circumscription eines Prädikates* **ab** *in einem Satz* $\Sigma(\mathbf{ab})$*"* als einen anderen Satz Σ' deuten, der ausdrückt, daß *"sobald ab in* $\Sigma(\mathbf{ab})$ *durch ein kleineres* $\mathbf{ab}'$ *ersetzt wird, die Aussage* $\Sigma(\mathbf{ab}')$ *nicht mehr gilt"*.

Definition 3.3.2 (1. Stufe Variable Circumscription)
Sei $\Sigma :=_{\mathbf{def}} \Sigma(\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P_n}; \mathbf{Z}_1, \ldots, \mathbf{Z_m})$ *ein Satz der die Prädikate* $\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P_n}$ *(die* minimiert *werden sollen), die Prädikate* $\mathbf{Z}_1, \ldots, \mathbf{Z_m}$ *(die* variieren *sollen) und eventuell weitere Prädikate (die* fix *bleiben sollen) enthält.*

Die 1. Stufe variable Circumscription $\mathbf{Circum}(\boldsymbol{\Sigma}; \underline{\mathbf{P}}; \underline{\mathbf{Z}})$ *von*

- $\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P_n}$ in $\Sigma(\underline{\mathbf{P}}; \underline{\mathbf{Z}})$, wobei $\mathbf{Z}_1, \ldots, \mathbf{Z_m}$ variieren

ist der universelle Abschluß des folgenden Schemas:

- $\underline{\phi'} < \underline{\mathbf{P}} \;\Rightarrow\; \neg\boldsymbol{\Sigma}(\underline{\phi'}; \underline{\zeta'})$ *für Formeln* $\phi'_\mathbf{i}$ *und* $\zeta'_\mathbf{j}$ *von geeigneter Stelligkeit*[2].

Die Relation "<" *schließt* *die Gleichheit aus; wir haben*

$$\underline{\phi'} < \underline{\mathbf{P}} \;:\Longleftrightarrow_{\mathbf{def}}\; \underline{\phi'} \le \underline{\mathbf{P}} \wedge \neg\forall\underline{\mathbf{x}}\forall\underline{\mathbf{y}} \bigwedge_{\mathbf{i}} (\phi'_\mathbf{i}(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}) \leftrightarrow \mathbf{P_i}(\underline{\mathbf{x}}))$$

wobei $\underline{\phi'} \le \underline{\mathbf{P}}$ *wie folgt definiert ist:*

$$\underline{\phi'} \le \underline{\mathbf{P}} \;:\Longleftrightarrow_{\mathbf{def}}\; \bigwedge_{\mathbf{i}} \forall\underline{\mathbf{x}}\forall\underline{\mathbf{y}}\; (\phi'_\mathbf{i}(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}) \rightarrow \mathbf{P_i}(\underline{\mathbf{x}}))$$

($\underline{\mathbf{x}}$ sind Tupel von Variablen von geeigneter Stelligkeit, nämlich der Stelligkeit von $\underline{P}$: $\underline{y}$ sind zusätzliche freie Variablen die in $\underline{\phi'}$ vorkommen können!)

Wir schreiben: $\Sigma \vdash_{\mathbf{circ}(\Sigma;\underline{\mathbf{P}};\underline{\mathbf{Z}})} \phi \quad :\Longleftrightarrow_{\mathbf{def}} \quad \Sigma(\underline{\mathbf{P}}; \underline{\mathbf{Z}}) + \mathbf{Circum}(\Sigma; \underline{\mathbf{P}}; \underline{\mathbf{Z}}) \vdash \phi.$

In der vorangestellten Definition ist es erlaubt, daß die Formeln $\phi'_\mathbf{i}$ (resp. $\zeta'_\mathbf{j}$), die für $\mathbf{P_i}$ (resp. $\mathbf{Z_j}$) in $\Sigma(\underline{\mathbf{P}}; \underline{\mathbf{Z}})$ ersetzt werden sollen, noch andere Variablen als $\mathbf{P_i}$ (resp. $\mathbf{Z_j}$) enthalten: Neue Variablen können eingeführt werden (das Tupel "$\underline{\mathbf{y}}$"). In diesem Fall verlangen wir, wie üblich in der Logik, daß diese Variablen frei in $\Sigma(\underline{\mathbf{P}}; \underline{\mathbf{Z}})$ bleiben (dies kann man leicht durch Umbenennung erreichen).

Halten wir unser wichtigstes Ergebnis fest:

> Wir haben einem Sachverhalt, der durch eine Theorie Σ beschrieben wird, eine erweiterte Theorie $\mathbf{Circum}(\Sigma)$ zugeordnet. Die monotonen Folgerungen dieser Theorie betrachten wir als die nichtmonotonen Folgerungen aus Σ. Die Konstruktion von $\mathbf{Circum}(\Sigma)$ aus Σ hängt von der Auswahl einzelner Prädikate in Σ ab: Einige werden minimiert (die $\underline{\mathbf{P}}$), während andere (die $\underline{\mathbf{Z}}$) variieren und wieder andere (die restlichen, nicht gesondert bezeichneten) fix bleiben.

Man beachte, daß die oben definierte Theorie $\mathbf{Circum}(\Sigma)$ ein Schema darstellt: Man darf beliebige Formeln $\phi'_\mathbf{i}$ und $\zeta'_\mathbf{j}$ einsetzen, sofern sie nur von geeigneter Stelligkeit sind. Wir haben also eine unendliche Formelmenge vor uns, auch wenn die Ausgangstheorie Σ endlich war.

3.3.3 Formel-Circumscription, 2. Stufe

Um eine endliche Theorie $\mathbf{Circum}(\Sigma)$ zu bekommen und damit das unendliche Schema zu vermeiden, kann man auf die Logik zweiter Stufe zurückgreifen. Dort

[2]Die Stelligkeiten von $\phi_\mathbf{i}$ ($\zeta_\mathbf{j}$) korrespondieren denen von $\mathbf{P_i}$ (von $\mathbf{Z_j}$), aber sie dürfen größer sein, d.h. sie dürfen mehr freie Variablen enthalten.

darf man ja über Relationen (nämlich die $\phi'_{\mathbf{i}}$ und $\zeta'_{\mathbf{j}}$) quantifizieren. Wir könnten daher die Definition 3.3.2 fast wortwörtlich übernehmen, müssen nur über die $\phi'_{\mathbf{i}}$ und $\zeta'_{\mathbf{j}}$ mit $\forall$ quantifizieren.

Wir wollen dies nicht tun, sondern eine Variante der Prädikats-Circumscription, die sogenannte *Formel*-Circumscription, definieren. Diese Variante kann natürlich auch in der ersten Stufe Version (wie oben) definiert werden. Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, daß beide Varianten äquivalent sind (jeweils entweder in $\mathcal{L}_{\mathbf{PL}\,1}$ oder in $\mathcal{L}_{\mathbf{PL}\,2}$ betrachtet).

Definition 3.3.3 (2. Stufe Formel-Circumscription)
Sei $\Sigma :=_{\mathbf{def}} \Sigma(\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P_n}; \mathbf{Z}_1, \ldots, \mathbf{Z_m})$ *eine Formel der 2. Stufe Logik mit ausgezeichnetem (freiem) Vorkommen der Prädikate* $\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P_n}$ *(die* minimiert *werden sollen),* $\mathbf{Z}_1, \ldots, \mathbf{Z_m}$ *(die* variieren *sollen). Sei* $\eta :=_{\mathbf{def}} \eta(\underline{\mathbf{P}}, \underline{\mathbf{x}})$ *eine Formel der 2. Stufe Logik mit freiem Vorkommen von* $\underline{P}$ *(freie Prädikatsvariablen) und von* $\underline{x}$ *(freie Individuenvariable).*

Die 2. Stufe Formel-Circumscription $\mathbf{Circum}(\boldsymbol{\Sigma}(\underline{\mathbf{P}};\underline{\mathbf{Z}});\boldsymbol{\eta}(\underline{\mathbf{P}},\underline{\mathbf{x}});\underline{\mathbf{Z}})$ *von*

- $\eta(\underline{\mathbf{P}}, \underline{\mathbf{x}})$ in $\Sigma(\underline{\mathbf{P}};\underline{\mathbf{Z}})$, wobei $\mathbf{Z}_1, \ldots, \mathbf{Z_m}$ variieren

ist der folgende zweite-Stufe-Satz:

- $\neg\exists \underline{\mathbf{X'Y'}}\ [\ \boldsymbol{\Sigma}(\underline{\mathbf{X'}};\underline{\mathbf{Y'}})\ \wedge\ \forall\underline{\mathbf{x}}\ \boldsymbol{\eta}(\underline{\mathbf{X'}},\underline{\mathbf{x}}) < \boldsymbol{\eta}(\underline{\mathbf{P}},\underline{\mathbf{x}})\ ]$.

Die Relation "<" <u>*schließt*</u> *die Gleichheit aus; wir haben*

$$\eta(\underline{\mathbf{X'}},\underline{\mathbf{x}}) < \eta(\underline{\mathbf{P}},\underline{\mathbf{x}}) \quad :\Longleftrightarrow_{\mathbf{def}} \quad [\eta(\underline{\mathbf{X'}},\underline{\mathbf{x}}) \to \eta(\underline{\mathbf{P}},\underline{\mathbf{x}}) \wedge \neg(\eta(\underline{\mathbf{P}},\underline{\mathbf{x}}) \to \eta(\underline{\mathbf{X'}},\underline{\mathbf{x}}))].$$

Da es keine "$\vdash$" Relation für die Logik zweiter Stufe gibt, können wir nur folgende Formel benutzen[3]*:*

$$\Sigma(\underline{\mathbf{P}};\underline{\mathbf{Z}}) + \mathbf{Circum}(\Sigma(\underline{\mathbf{P}};\underline{\mathbf{Z}});\eta(\underline{\mathbf{P}},\underline{\mathbf{x}});\underline{\mathbf{Z}}) \models \psi.$$

Wir haben also unsere Theorie $\Sigma(\underline{\mathbf{P}};\underline{\mathbf{Z}})$ um einen einzigen Satz der Logik zweiter Stufe erweitert.

3.3.4 Korrektheit und Vollständigkeit

Man beachte, daß die erste Stufe *variable Circumscription* ein spezieller Fall der *Formel-Circumscription* ist: Man setze einfach

$$\eta(\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P_n}; \underline{\mathbf{x_1}}, \ldots, \underline{\mathbf{x_n}}) :=_{\mathbf{def}} \mathbf{P}_1(\underline{\mathbf{x_1}}) \wedge \ldots \wedge \mathbf{P_n}(\underline{\mathbf{x_n}}).$$

Auf der anderen Seite ist die *Formel-Circumscription* nicht ausdrucksstärker als *variable Circumscription*: Wenn wir ein neues Prädikat $\mathbf{P}_0$ mit derselben Stelligkeit wie $\underline{\mathbf{x}}$ einführen und

$$\Sigma'(\mathbf{P}_0, \underline{\mathbf{P}}; \underline{\mathbf{Z}}) :=_{\mathbf{def}} \Sigma(\underline{\mathbf{P}};\underline{\mathbf{Z}}) + \forall\underline{\mathbf{x}}(\mathbf{P}_0(\underline{\mathbf{x}}) \leftrightarrow \eta(\underline{\mathbf{P}},\underline{\mathbf{x}}))$$

[3] $\underline{\mathbf{P}}$ und $\underline{\mathbf{Z}}$ werden als *Konstanten* und nicht als freie (Prädikats-) Variablen interpretiert.

setzen, dann zeigt man leicht, daß $\Sigma'(\mathbf{P}_0, \underline{\mathbf{P}}; \underline{\mathbf{Z}})$ eine Definitionserweiterung von

$$\mathbf{Circum}(\Sigma(\underline{\mathbf{P}}; \underline{\mathbf{Z}}); \eta(\underline{\mathbf{P}}, \underline{\mathbf{x}})))$$

und daher konservativ über dieser Formel ist.

Wie man erwartet, entspricht die Semantik der minimalen Modelle genau der 2. Stufe Formel-Circumscription. Für die erste Stufe ergibt sich nur die Korrektheit.

Theorem 3.3.4 (Lifschitz/ Etherington)

1. Stufe (Korrektheit):

$$\Sigma + \mathbf{Circum}(\Sigma; \underline{\mathbf{P}}; \underline{\mathbf{Z}}) \models \psi \ \textit{impliziert} \ \ \Sigma \models_{\mathbf{circ}(\underline{\mathbf{P}}, \underline{\mathbf{Z}})} \psi,$$

oder äquivalent,

$$\Sigma \vdash_{\mathbf{circ}(\underline{\mathbf{P}}, \underline{\mathbf{Z}})} \psi \ \textit{impliziert} \ \ \Sigma \models_{\mathbf{circ}(\underline{\mathbf{P}}, \underline{\mathbf{Z}})} \psi.$$

2. Stufe (Vollständigkeit): $\Sigma + \mathbf{Circum}(\Sigma; \underline{\mathbf{P}}; \underline{\mathbf{Z}}) \models \psi \quad \underline{\text{gdw}} \quad \Sigma \models_{\mathbf{circ}(\underline{\mathbf{P}}, \underline{\mathbf{Z}})} \psi$

Andere Spezialfälle von CIRC, für die auch Vollständigkeitstheoreme gelten, werden in [PM86] diskutiert. Es gibt auch Fälle, in denen die 2. Stufe Circumscription zu ersten-Stufe-Formeln reduziert werden kann (siehe [Rab89]).

Wir wollen das letzte Theorem an weiteren Beispielen illustrieren:

Beispiel 3.3.5 (ab-Formalismus)

a) (R. Reiter)

1)	$\mathbf{thing}(\mathbf{x}) \wedge \neg\mathbf{ab1}(\mathbf{x})$	$\rightarrow$	$\neg\mathbf{fly}(\mathbf{x})$
2)	$\mathbf{bird}(\mathbf{x})$	$\rightarrow$	$\mathbf{thing}(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{ab1}(\mathbf{x})$
3)	$\mathbf{bird}(\mathbf{x}) \wedge \neg\mathbf{ab2}(\mathbf{x})$	$\rightarrow$	$\mathbf{fly}(\mathbf{x})$
4)	$\mathbf{emu}(\mathbf{x})$	$\rightarrow$	$\mathbf{bird}(\mathbf{x}) \wedge \neg\mathbf{fly}(\mathbf{x})$

Was ergibt die CIRC von ab1(x), ab2(x)?

b) (D. Kueker)

1)		$\mathbf{b} \neq \mathbf{c}, \mathbf{ab}(\mathbf{b})$
2)	$\forall\mathbf{x}$	$((\mathbf{b} \neq \mathbf{s}(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{c} \neq \mathbf{s}(\mathbf{x}))$
3)	$\forall\mathbf{x}$	$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{s}(\mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$
4)	$\forall\mathbf{x}$	$\mathbf{ab}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{ab}(\mathbf{s}(\mathbf{x}))$

Was ergibt CIRC von ab(c)?

c) (Problem der Gleichheit)

1)	$\mathbf{german}(\mathbf{x}) \wedge \neg\mathbf{ab}(\mathbf{x})$	$\rightarrow$	$\mathbf{likesbeer}(\mathbf{x})$
2)	$\mathbf{german}(\mathbf{Peter})$		
3)	$\neg\mathbf{likesbeer}(\mathbf{Hans})$		

Was gilt für likesbeer(Peter)?

In a) erhalten wir die richtigen Antworten: $\mathbf{ab1}(\mathbf{x}) \leftrightarrow \mathbf{bird}(\mathbf{x})$, $\mathbf{ab2}(\mathbf{x}) \leftrightarrow \mathbf{emu}(\mathbf{x})$, $\mathbf{thing}(\mathbf{x}) \wedge \neg\mathbf{bird}(\mathbf{x}) \rightarrow \neg\mathbf{fly}(\mathbf{x})$ und $\mathbf{bird}(\mathbf{x}) \wedge \neg\mathbf{emu}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{fly}(\mathbf{x})$ sind alle ableitbar durch Circumscription von $\{\mathbf{ab1}, \mathbf{ab2}\}$ in

$$\Sigma = \Sigma(\mathbf{ab1}, \mathbf{ab2}; \mathbf{fly}) = \ 1) \ \wedge \ 2) \ \wedge \ 3) \ \wedge \ 4),$$

wobei $\mathbf{fly}(\mathbf{x})$ variiert.

Beispiel b) zeigt, daß die umgekehrte Richtung der 1. Stufe Korrektheit im obigen Theorem nicht gilt. Denn es ist wohlbekannt, daß der transitive Abschluß von **ab** (dieser ist ja gerade die Bedeutung des minimierten Prädikats **ab**) nicht in der 1. Stufe Logik ausdrückbar ist.

Beispiel c) zeigt, daß CIRC nicht benutzt werden kann, um die Gleichheit zu minimieren. Es ist leicht zu sehen, daß dies auch nicht möglich ist, wenn man die Definition von $<^{\mathbf{P},\mathbf{Z}}$ geeignet modifiziert. Denn um **likesbeer**(**Peter**) zu beweisen, müssen wir zuerst $\mathbf{Peter} \neq \mathbf{Hans}$ ableiten, was aber nicht möglich ist. Der Grund ist, daß wir über Individuen und nicht über die Terme, die sie bezeichnen, quantifizieren.

3.3.5 Varianten

Zwei natürliche Einschränkungen der Circumscription sind die *closed* CIRC und die *nonrecursive* CIRC:

- in der cl-CIRC sind nur die ϕ' (ξ') als substituierende Instanzen zugelassen, die keine anderen freien Variablen enthalten als $\mathbf{P}$ ($\mathbf{Z}$);
- in der nr-CIRC, sind nur die ϕ' (ζ') als substituierende Instanzen zugelassen, die keine Vorkommen von $\mathbf{P}$ ($\mathbf{Q}$) enthalten.[4]

Man kann sich auch fragen, welche Rolle die fixen Prädikate in einer Circumscription spielen. Sind sie genau so wichtig wie die variierenden oder werden sie überhaupt nicht benötigt. Konolige und de Kleer haben gezeigt ([dKK89]), daß jede Circumscription mit fixen Prädikaten in eine äquivalente ohne fixe Prädikate umgewandelt werden kann. Formal geschieht dies dadurch, daß für jedes fixe Prädikat $\mathbf{R_{fix}}$ zwei neue Prädikate $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ eingeführt werden, die dann beide zu minimieren sind.

3.4 Prioritätscircumscription

Während in den bisher vorgestellten Varianten der Circumscription alle zu minimierenden Prädikate gleich behandelt wurden (*parallele CIRC*), ist es in der *Prioritäts-Circumscription* möglich, Prioritäten zwischen den einzelnen zu minimierenden Prädikaten aufzustellen: Prädikate mit höherer Priorität müssen zuerst minimiert werden:

Definition 3.4.1 (Prioritäts-Circumscription)
Sei $\Sigma(\underline{\mathbf{P}};\underline{\mathbf{Z}})$ eine Theorie,

$$\mathcal{P}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{P}_{\mathbf{n}} = \{\mathbf{p_{i,j}} : \mathbf{i} = 1, \ldots, \mathbf{n}; \mathbf{j} = 1, \ldots, \mathbf{f(i)}\} = \{\underline{\mathbf{p}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{p}}_{\mathbf{n}}\}$$

eine disjunkte Vereinigung aller zu minimierenden Prädikate $\underline{P}$ und seien $\underline{Z}$ die variierenden Prädikate. Wir wollen die in $\mathcal{P}_{\mathbf{i}}$ enthaltenen Prädikate minimieren,

[4] Siehe [Mot87, BMM89].

bevor wir Prädikate aus $\mathcal{P}_\mathbf{j}$ *für i<j minimieren. Prädikate in derselben Partition haben gleiche Priorität.*

Die Prioritäts-Circumscription $\mathbf{Circum_{prior.}}(\boldsymbol{\Sigma}(\underline{\mathbf{P}};\underline{\mathbf{Z}});\mathcal{P}_1 < \ldots < \mathcal{P}_\mathbf{n};\underline{\mathbf{Z}})$ *von*

- $\mathcal{P}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{P}_\mathbf{n}$ in $\Sigma(\underline{\mathbf{P}};\underline{\mathbf{Z}})$, wobei $\mathbf{Z}_1,\ldots,\mathbf{Z_m}$ variieren,

ist der universelle Abschluß des folgenden Schemas:

- $\underline{\phi'} < \underline{\mathbf{P}} \Rightarrow \neg\boldsymbol{\Sigma}(\underline{\phi'};\underline{\zeta'})$ *für Formeln* $\phi'_\mathbf{i}$ *und* $\zeta'_\mathbf{j}$ *von geeigneter Stelligkeit*[5]

wobei die Relation $\underline{\phi'} \leq \underline{\mathbf{P}}$ *wie folgt definiert ist:*

$$\underline{\phi'} \leq \underline{\mathbf{p}} \;:\Longleftrightarrow_{\mathbf{def}}\; \bigwedge_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{n}}[((\bigwedge_{\mathbf{j}=1}^{\mathbf{i}-1}\underline{\phi}'_\mathbf{j} \Leftrightarrow \underline{\mathbf{p}}_\mathbf{j}) \Rightarrow \underline{\phi}'_\mathbf{i} \leq \underline{\mathbf{p}}_\mathbf{i})]$$

Für den einfachsten Fall: $\mathcal{P}_1 :=_{\mathbf{def}} \{\mathbf{p}_1\}$ und $\mathcal{P}_2 :=_{\mathbf{def}} \{\mathbf{p}_2\}$ erhalten wir für $(\phi'_1,\phi'_2) \leq (\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2)$ die Formel

$$(\phi'_1 \leq \mathbf{p}_1) \wedge ((\phi'_1 \Leftrightarrow \mathbf{p}_1) \Rightarrow (\phi'_2 \leq \mathbf{p}_2)),$$

anstatt einfach $(\phi'_1 \leq \mathbf{p}_1) \wedge (\phi'_2 \leq \mathbf{p}_2)$. *Prioritäts-Circumscription* kann auch als geeignete Konjunktion von parallelen Circumscriptionen definiert werden, wie das folgende Theorem zeigt:

Theorem 3.4.2 (Prioritäts-Circ. = Konjunktion von Parallelen Circ.s) *Sei* $\Sigma(\underline{\mathbf{P}};\underline{\mathbf{Z}})$ *eine Theorie, seien* $\underline{Z}$ *die variierenden Prädikate und sei*

$$\mathcal{P}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{P}_\mathbf{n} :=_{\mathbf{def}} \{\mathbf{p_{i,j}} : \mathbf{i} = 1,\ldots,\mathbf{n}; \mathbf{j} = 1,\ldots,\mathbf{f(i)}\} = \{\underline{\mathbf{p}}_1,\ldots,\underline{\mathbf{p}}_\mathbf{n}\}$$

eine disjunkte Vereinigung aller zu minimierenden Prädikate $\underline{P}$*.*

Dann ist $\mathbf{Circum_{prior.}}(\Sigma(\underline{\mathbf{P}};\underline{\mathbf{Z}});\mathcal{P}_1 < \ldots < \mathcal{P}_\mathbf{n};\underline{\mathbf{Z}})$ *äquivalent zu*

$$\begin{array}{ll} & \mathbf{Circum}(\Sigma(\underline{\mathbf{P}};\underline{\mathbf{Z}});\mathcal{P}_1;\mathcal{P}_2,\mathcal{P}_3,\ldots,\mathcal{P}_\mathbf{k}\cup\underline{\mathbf{Z}}) \\ \wedge & \mathbf{Circum}(\Sigma(\underline{\mathbf{P}};\underline{\mathbf{Z}});\mathcal{P}_2;\mathcal{P}_3,\mathcal{P}_4,\ldots,\mathcal{P}_\mathbf{k},\underline{\mathbf{Z}}) \\ \vdots & \\ \wedge & \mathbf{Circum}(\Sigma(\underline{\mathbf{P}};\underline{\mathbf{Z}});\mathcal{P}_\mathbf{k};\underline{\mathbf{Z}}) \end{array}$$

Wann braucht man Prioritäten? Betrachten wir das folgende, eng mit dem Beispiel aus Abbildung 2.2 (Student/Erwachsener) verwandte Problem.

[5] Der Einfachheit halber setzen wir nun voraus, daß die Stelligkeiten von $\phi_\mathbf{i}$ (bzw. $\zeta_\mathbf{j}$) genau denen von $\mathbf{P_i}$ (bzw. $\mathbf{Z_j}$) entsprechen.

Beispiel 3.4.3 (Spezifizität)
Vögel fliegen normalerweise, Pinguine fliegen normalerweise nicht, Pinguine sind Vögel, Tweety ist ein Pinguin:

$$\begin{array}{lll} \forall \mathbf{x} & (\mathbf{pinguin}(\mathbf{x}) \wedge \neg \mathbf{ab}_1(\mathbf{x}) & \rightarrow \neg \mathbf{fliegt}(\mathbf{x})) \\ \forall \mathbf{x} & (\mathbf{vogel}(\mathbf{x}) \wedge \neg \mathbf{ab}_2(\mathbf{x}) & \rightarrow \mathbf{fliegt}(\mathbf{x})) \\ \forall \mathbf{x} & (\mathbf{pinguin}(\mathbf{x}) & \rightarrow \mathbf{vogel}(\mathbf{x})) \\ & \mathbf{pinguin}(\mathbf{tweety}) & \end{array}$$

Wir bezeichnen diese Formelmenge mit Σ. Wir erwarten, da die spezifischere Information (nämlich daß Tweety ein Pinguin ist) vorliegt, daß Tweety nicht fliegt. Mit $\Sigma :=_{\mathbf{def}} \Sigma(\mathbf{ab}_1, \mathbf{ab}_2; \mathbf{fliegt})$ ergeben sich aber zwei minimale Modelle. Beide sind Erweiterungen von $\mathcal{W}_0 :=_{\mathbf{def}} \{\mathbf{pinguin}(\mathbf{tweety}), \mathbf{vogel}(\mathbf{tweety})\}$

1. $\mathcal{W}_1 :=_{\mathbf{def}} \mathcal{W}_0 \cup \{\neg \mathbf{ab}_1(\mathbf{tweety}), \mathbf{ab}_2(\mathbf{tweety}), \neg \mathbf{fliegt}(\mathbf{tweety})\}$,
2. $\mathcal{W}_2 :=_{\mathbf{def}} \mathcal{W}_0 \cup \{\mathbf{ab}_1(\mathbf{tweety}), \neg \mathbf{ab}_2(\mathbf{tweety}), \mathbf{fliegt}(\mathbf{tweety})\}$.

Intuitiv möchten wir, daß $\mathcal{W}_1$ kleiner ist als $\mathcal{W}_2$. Dies können wir aber nur erreichen, wenn wir $\mathbf{ab}_1$ mit höherer Priorität minimieren. Dann ist nämlich

$$\mathcal{W}_1 <^{\{\mathbf{ab}_1\};\{\mathbf{ab}_2,\mathbf{fliegt}\}} \mathcal{W}_2,$$

da $\mathbf{ab}_2$ unter den variierenden Prädikaten ist. Bezüglich $<^{\{\mathbf{ab}_1,\mathbf{ab}_2\};\{\mathbf{fliegt}\}}$ sind $\mathcal{W}_1$ und $\mathcal{W}_2$ unvergleichbar.

Tatsächlich haben wir:

$$\mathbf{Circum}(\Sigma; \{\mathbf{ab}_1, \mathbf{ab}_2\}; \{\mathbf{fliegt}\}) \not\models \neg \mathbf{fliegt}(\mathbf{tweety})$$

aber

$$\mathbf{Circum}_{\mathbf{prior.}}(\Sigma; \{\mathbf{ab}_1\} < \{\mathbf{ab}_2\}; \{\mathbf{fliegt}\}) \models \neg \mathbf{fliegt}(\mathbf{tweety}).$$

3.5 Probleme mit CIRC

Wir wollen aber auch auf einige Limitierungen und Probleme mit CIRC eingehen:

1. Falls $\underline{\mathbf{Z}}$ leer ist (kein Prädikat darf variieren, während $\mathbf{P}$ minimiert wird), so sind keine neuen Grundinstanzen von *nicht umschriebenen Prädikaten* sowie keine neuen positiven Grundinstanzen von *umschriebenen Prädikaten* ableitbar (siehe [EMR85]).

   - Es gilt für $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{P}'$ oder $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Z}'$: $\mathrm{Circum}(\Sigma\ ;\mathrm{P};\mathrm{Z}) \subseteq \mathrm{Circum}(\Sigma;\mathrm{P}';\mathrm{Z}')$.

   Dieses Phänomen haben wir schon in Abschnitt 3.3.1 kennengelernt; dort gab es ein $<^{\mathbf{pinguin};\emptyset}$-minimales Modell, indem Tweety nicht fliegt.

2. Aus der Konsistenz von Σ folgt <u>nicht</u> die Konsistenz der umschriebenen Theorie: Für universelles Σ ([Lif86]) oder für closed-nonrecursive CIRC ([Mot87]) trifft dies aber zu (siehe auch [BMM89]).

Beispiel 3.5.1 (Nichtexistenz minimaler Modelle)
Wir betrachten eine Sprache $\mathcal{L}$ mit genau einem einstelligen Prädikatssymbol $\mathbf{P}$*, einer Konstanten* $\mathbf{c}$ *(nullstelliges Funktionssymbol) und einem einstelligen Funktionssymbol* $\mathbf{f}$*. Sei*

$$\Sigma :=_{\mathbf{def}} \{\exists \mathbf{x} \mathbf{P}(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x}\, (\mathbf{P}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))\}.$$

Betrachten wir zunächst die Herbrand-Modelle von Σ, also all jene Modelle, deren Universum genau aus den Termen der zugrundeliegenden Sprache besteht (nämlich $\{\mathbf{c}, \mathbf{P}(\mathbf{c}), \mathbf{P}(\mathbf{f}(\mathbf{c})), \ldots\}$. Die Herbrand-Modelle von Σ sind offenbar genau die

$$\mathcal{M}_{\mathbf{i}} :=_{\mathbf{def}} \{\mathbf{P}(\mathbf{f}^{\mathbf{j}}(\mathbf{c})) : \ \mathbf{i} \leq \mathbf{j} \in \mathbb{N}\},$$

mit $\mathbf{i} \in \mathbb{N}$. Diese bilden eine unendlich absteigende Kette $\mathcal{M}_{\mathbf{i}} \supset \mathcal{M}_{\mathbf{i}+1}$ mit

$$\bigcap_{\mathbf{i}=0}^{\omega} \mathcal{M}_{\mathbf{i}} = \emptyset.$$

Die leere Struktur ist aber kein Modell von Σ!

Strengenommen haben wir bisher nur gezeigt, daß es kein minimales Herbrand-Modell von Σ geben kann. Allerdings funktioniert der allgemeine Fall völlig analog. Angenommen, $\mathcal{M}$ ist ein minimales Modell von Σ. Dann gibt es ein $\mathbf{m} \in \mathbf{M}$ mit $\mathcal{M} \models \mathbf{P}(\mathbf{m})$. Dann gilt aber erst recht $\mathcal{M} \models \mathbf{P}(\mathbf{f}_{\mathbf{i}}(\mathbf{m})$ für $\mathbf{i} \in \mathbb{N}$. Dann ist aber $\mathcal{M}$ nicht minimal, da wir uns ein kleineres konstruieren können, nämlich indem wir $\mathbf{P}(\mathbf{m})$ falsch setzen.

3. Circumscription kann nur auf endliche Theorien angewandt werden, sonst hätten wir ja unendlich lange Formeln zu betrachten.

4. Das größte Problem allerdings ist es, die *richtigen* Instanzen zu finden, um die gewünschten Konklusionen zu enthalten. In Beispiel 3.3.5 a) muß man z.B. $(\Sigma = \Sigma(\mathbf{P}, \mathbf{Z}) = \Sigma(\mathbf{ab}1, \mathbf{ab}2; \mathbf{fly}))$, mit

$$\mathbf{ab}1'(\mathbf{x}) :=_{\mathbf{def}} \mathbf{bird}(\mathbf{x}),\ \mathbf{ab}2'(\mathbf{x}) :=_{\mathbf{def}} \mathbf{emu}(\mathbf{x})$$

und

$$\mathbf{fly}'(\mathbf{x}) :=_{\mathbf{def}} \mathbf{bird}(\mathbf{x}) \wedge \neg \mathbf{emu}(\mathbf{x})$$

wählen. Oft sind die richtigen Einsetzungen nicht auf Anhieb zu bestimmen.

5. Die Komplexität ist größer als in der Prädikatenlogik. Während dort die Ableitung gültiger Sätze zwar nicht rekursiv, aber doch wenigstens rekursiv aufzählbar ist (Π^0_1-vollständig), ist die Gültigkeit in minimalen Modellen gleich Π^1_2-vollständig.

3.6 Das Yale-Shooting Problem

Dieses Problem stammt aus der Mitte der 80er Jahre. Nachdem man einige Formalismen (eben die Default Logik, die Circumscription und auch die Autoepistemische Logik) definiert hatte, stellte man fest, daß ein relativ einfaches Problem, das *Yale-Shooting Problem* in keinem der bekannten Formalismen in naheliegender Weise formuliert und richtig behandelt wird.

Beispiel 3.6.1 (Yale-Shooting-Problem)
Die Prosa-Formulierung lautet:

> *Fred lebt zum Zeitpunkt* $\mathbf{T}_0$*. Man lädt ein Gewehr bis* $\mathbf{T}_1$*, man wartet bis* $\mathbf{T}_2$*. Schließlich schießt man auf Fred und erreicht* $\mathbf{T}_3$*. Die Axiome sagen aus, daß alle Fakten persistent in der Zeit sind mit der einzigen Ausnahme: Wenn man auf Fred mit einem geladenen Gewehr schießt, ist er nicht länger am Leben.*

Die folgende Formalisierung ist offensichtlich:

- "$\mathbf{ab}(\mathbf{f},\mathbf{e},\mathbf{t})$" *steht für "es ist abnormal, daß Zustand* $\mathbf{f}$ *zur Zeit* $\mathbf{t}+1$ *gilt, wenn die Aktion* $\mathbf{e}$ *zur Zeit* $\mathbf{t}$ *stattfindet ",*
- "$\mathbf{holds}(\mathbf{f},\mathbf{t})$" *steht für "Zustand* $\mathbf{f}$ *gilt zur Zeit* $\mathbf{t}$"
-
  - *Zustände sind:* **LEBT** *und* **GELADEN**.
  - *Aktionen sind:* **Laden**, **Warten** *und* **Schießen**.

1. (a) $\mathbf{T}_1 :=_{\mathbf{def}}$ *result(***Laden**,$\mathbf{T}_0$*),*
   (b) $\mathbf{T}_2 :=_{\mathbf{def}}$ *result(***Warten**,$\mathbf{T}_1$*),*
   (c) $\mathbf{T}_3 :=_{\mathbf{def}}$ *result(***Schießen**,$\mathbf{T}_2$*),*
2. *holds(***LEBT**,$\mathbf{T}_0$*),*
3. $\forall t$ *holds(***GELADEN***,result(***Laden***,t)),*
4. $\forall t$ *holds(***GELADEN***,t)* $\rightarrow$
   $\neg$*holds(***LEBT***,result(***Schießen***,t))* $\wedge$ *ab(***LEBT**,**Schießen***,t),*
5. $\forall fet$ ((holds(f,t) $\wedge\neg$ab(f,e,t))$\rightarrow$ holds(f,result(e,t))).

Wenn wir die Circumscription dieser Theorie betrachten und $\mathbf{ab}(\mathbf{f},\mathbf{e},\mathbf{t})$ minimieren, so existiert immer ein minimales Modell in dem gilt:

1. $\mathbf{ab}(\mathbf{GELADEN},\mathbf{Warten},\mathbf{T}_1)$ (das Gewehr entlud sich),
2. $\neg\mathbf{holds}(\mathbf{GELADEN},\mathbf{T}_2)$ und
3. $\mathbf{holds}(\mathbf{LEBT},\mathbf{T}_3)$.

Das eigentlich intendierte Modell, nämlich

1. $\mathbf{ab}(\mathbf{LEBT}, \mathbf{Schießen}, \mathbf{T}_2)$,
2. $\mathbf{holds}(\mathbf{GELADEN}, \mathbf{T}_2)$ und
3. $\neg\mathbf{holds}(\mathbf{LEBT}, \mathbf{T}_3)$.

ist mit dem ersten nicht vergleichbar, beide sind minimal!

Dasselbe Problem tritt auf, wenn man die Default Logik benutzt. Man kann dann die obige Formulierung beibehalten (natürlich muß man alles in Aussagenlogik formulieren, da wir DL ja nur für $\mathcal{L}_{\mathbf{AL}}$ eingeführt haben) und muß nur noch die Defaults

- für alle $\mathbf{f}, \mathbf{e}, \mathbf{t}$: $\frac{\emptyset : \neg\mathbf{ab}(\mathbf{f},\mathbf{e},\mathbf{t})}{\neg\mathbf{ab}(\mathbf{f},\mathbf{e},\mathbf{t})}$

hinzunehmen. Auch hier erhält man allerdings die Existenz von zwei Extensionen (den beiden gerade beschriebenen Modellen) anstatt einer einzigen.

Das Problem ist daher,

1. im voraus die gewünschten Extensionen zu charakterisieren, oder äquivalent dazu, das richtige *minimale*[6] Modell auszuwählen,
2. eine uniforme Methode anzugeben, wie man Defaults formulieren muß, damit die ungewollten Extensionen nicht auftreten.

[6] wobei **ab** zu minimieren ist

Kapitel 4

Theorie nichtmonotoner Inferenzrelationen

In den vorangegangenen Kapiteln haben wir einige nichtmonotone Logiken vorgestellt. Neben der CWA und dem Ansatz von Poole haben wir die Default Logik und die Circumscription in einigen Varianten kennengelernt. Während einige Logiken innerhalb der Prädikatenlogik erster Stufe formuliert sind (CIRC, CWA, Poolescher Ansatz), mußten wir für DL neue Inferenzregeln auf Metaebene einführen. Allen diesen Ansätzen und überhaupt jedem logischen System ist jedoch folgendes gemeinsam:

> *Jedes nichtmonotone System (DL, CIRC, CWA, ...) definiert in kanonischer Weise eine Relation*
>
> $$\mid\!\sim\ \subseteq \mathbf{Pot}(\mathbf{Fml}_{\mathcal{L}}) \times \mathbf{Pot}(\mathbf{Fml}_{\mathcal{L}}) :\ \Psi \mid\!\sim \Phi.$$

Wir sagen dann: Φ ist aus Ψ nichtmonoton herleitbar. Dieselbe Situation ist aber auch für die klassische Aussagenlogik oder Prädikatenlogik gegeben. Dort ist $\models$ bzw. $\vdash$ die entsprechende Relation. Wir wissen, daß es für $\vdash$ einen Satz von Inferenzregeln gibt (siehe Abschnitt 2.1, Definition 2.1.11), also eine *Axiomatisierung*. Außerdem gibt es für $\models$ eine zu $\vdash$ passende *Semantik* (siehe Abschnitt 2.1, Definition 2.1.2 und Theorem 2.1.13).

Was liegt daher näher, als auch zur Definition von nichtmonotonen Logiken zwischen ähnlichen Ansätzen zu unterscheiden? Genau dies wurde in den letzten Jahren getan. In diesem Kapitel stellen wir einen sehr allgemeinen

1. *axiomatischen* und
2. einen *semantischen*

Ansatz vor, um nichtmonotones Schließen zu formalisieren.

Der *axiomatische* Ansatz ([Gab84, KLM90], [Mak89, Mak94]) geht auf Tarski ([Tar56]) zurück und besteht in der Untersuchung von abstrakten Ableitbarkeitsrelationen, die unter gewissen Inferenzregeln abgeschlossen sind. Diese Inferenzregeln erhält man durch Abschwächung der klassischen Regeln oder indem man ganz neue, speziell auf den nichtmonotonen Fall zugeschnittene, definiert.

Gabbay ([Gab84, GC88]) war der erste, der vorschlug, Relationen $\mid\sim$ zu untersuchen, welche die folgenden Bedingungen erfüllen:

1. $\alpha \mid\sim \alpha$,
2. $\alpha \mid\sim \beta$ und $\alpha \mid\sim \gamma$ impliziert $\alpha \wedge \beta \mid\sim \gamma$ und
3. $\alpha \mid\sim \beta$ und $\alpha \wedge \beta \mid\sim \gamma$ impliziert $\alpha \mid\sim \gamma$.

Der zugrundeliegende monotone Teil seiner Logik fußt aber nicht auf der klassischen Logik $\vdash$, sondern auf einer intuitionistischen Relation $\vdash_{\mathbf{int}}$.

Der *semantische* Ansatz wurde von Yoav Shoham in [Sho86] eingeführt und ist eine Verallgemeinerung der partiellen Ordnung $<^{\mathbf{P};\mathbf{Z}}$, die in Kapitel 3, Abschnitt 3.3.1 zur Definition der Circumscription CIRC als Ordnung auf der Menge aller Modelle einer Theorie $\mathbf{T}$ eingeführt wurde. Shoham abstrahierte von dieser speziellen Ordnung und definierte, relativ zu einer gegebenen Logik $\mathcal{L}_{\mathbf{mon}}$ eine neue Logik $\mathcal{L}_{\sqsubseteq}$, indem er eine beliebige reflexive und transitive binäre Relation $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{A}'$ ($\mathcal{A}'$ *ist bevorzugt über* $\mathcal{A}$) auf den Modellen von L betrachtet und eine Ableitungsrelation $\models_{\sqsubseteq} \phi$ wie folgt definiert:

$$\mathbf{T} \models_{\sqsubseteq} \phi \quad :\Longleftrightarrow_{\mathbf{def}} \begin{array}{l} \text{jedes Modell } \mathcal{A} \text{ von } \mathbf{T} \text{ für das es kein } \mathcal{A}' \text{ mit } \mathcal{A}' \models \mathbf{T}, \\ \mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{A}' \text{ und } \mathcal{A}' \not\sqsubseteq \mathcal{A} \text{ gibt, ist auch ein Modell von } \phi. \end{array}$$

Wenn $\sqsubseteq$ eine partielle Ordnung ist, nennen wir $\mathrm{L}_{\sqsubseteq}$ eine *präferentielle* Logik. Shoham glaubte zunächst, daß alle bekannten nichtmonotonen Logiken sich als Spezialfälle seiner Definition herausstellen würden: Makinson ([Mak89]) zeigte, daß diese Vermutung falsch ist. Schon die Reitersche Default-Logik läßt sich nicht in Shohams System darstellen (siehe Abschnitt 4.6.2). Im folgenden benutzen wir $\mathcal{A} \prec \mathcal{A}'$ anstelle von "$\mathcal{A}' \sqsubseteq \mathcal{A}$ und $\mathcal{A} \neq \mathcal{A}'$".

Die Gliederung dieses Kapitels ist wie folgt: In Abschnitt 4.1 stellen wir den axiomatischen Ansatz dar. Wir definieren die in der Literatur (von Kraus, Lehmann, Magidor und Makinson) betrachteten abstrakten Eigenschaften einer nichtmonotonen Relation $\mid\sim$ und definieren den *kumulativen* und *präferentiellen* Abschluß.

In Abschnitt 4.2 stellen wir dem axiomatischen einen *semantischen* Ansatz gegenüber und führen den Begriff des *kumulativen* bzw. des *präferentiellen* Modelles ein. Wir zeigen dann im nächsten Abschnitt (4.3), daß Axiomatik und Semantik zueinander passen: Dies ist gerade der Inhalt der wichtigen Korrektheits- und Vollständigkeitssätze von Kraus, Lehmann und Magidor.

Im Abschnitt 4.4 gehen wir ausführlich auf die Bedeutung der Vollständigkeitssätze und den engen Zusammenhang des kumulativen und präferentiellen Abschlusses ein. Anhand einiger Beispiele illustrieren wir die Anwendung der Vollständigkeitssätze.

Abschnitt 4.5 weist auf stärkere Inferenzregeln hin. Wir führen hier die *Rationalität* und einige ihrer Varianten ein. Diese Regeln sind nicht mehr von der bisherigen Horn-Form (wie die in Abschnitt 4.1.2 und 4.1.3 vorgestellten) und daher

	endlicher Ansatz	**unendlicher Ansatz**
Reflexivität	$\alpha \in \mathbf{A} \implies \mathbf{A} \mid\!\sim \alpha$	$\mathbf{A} \subseteq \mathbf{C}(\mathbf{A})$
Transitivität	$\mathbf{A}, \beta \mid\!\sim \alpha,\ \mathbf{A} \mid\!\sim \beta \implies \mathbf{A} \mid\!\sim \alpha$	$\mathbf{C}(\mathbf{A}) = \mathbf{C}(\mathbf{C}(\mathbf{A}))$
Monotonie	$\mathbf{A} \mid\!\sim \alpha \implies \mathbf{A}, \beta \mid\!\sim \alpha$	$\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B} \implies \mathbf{C}(\mathbf{A}) \subseteq \mathbf{C}(\mathbf{B})$
	A endlich!	**A, B beliebig.**

Tabelle 4.1: Endlicher ($\mid\!\sim$) vs. unendlicher ($\mathbf{C}$) Ansatz.

ist es auch nicht (jedenfalls nicht in kanonischer Weise) möglich, den kumulativen bzw. präferentiellen Abschlüssen entsprechende Vervollständigungen zu definieren.

Schließlich fragen wir in Abschnitt 4.6, welche der bisher vorgestellten abstrakten Eigenschaften in welchen (Teilsystemen) der in Kapitel 2 und 3 definierten Logiken gelten.

4.1 Axiomatische Ansätze: Abschlüsse von $\mathcal{K}$

Wir wollen zunächst die klassischen Tarski-Axiome betrachten. Wir haben zwei verschiedene Möglichkeiten, sie auszudrücken: Wir können eine *finite* Relation " $\mid\!\sim$ ", also eine Relation zwischen *endlichen* Mengen von Formeln oder eine *unendliche* Relation "$\mathbf{C}$", also eine beliebige Funktion von $\mathbf{Pot}(\mathbf{Fml}_\mathcal{L})$ nach $\mathbf{Pot}(\mathbf{Fml}_\mathcal{L})$, betrachten. Im klassischen, also monotonen Fall[1], sind beide Vorgehensweisen äquivalent: Das ist genau die Aussage des Kompaktheitssatzes. Im nichtmonotonen allerdings ist die Kompaktheit keine wünschenswerte Eigenschaft, denn sie impliziert ja offensichtlich die Monotonie. Es gibt keine *offensichtliche* Möglichkeit, eine zwischen endlichen Formelmengen definierte nichtmonotone Relation $\mid\!\sim$ zu einer zwischen unendlichen Mengen definierten zu erweitern: In [FLM89, Fre91] werden verschiedene solcher Möglichkeiten untersucht.

Während Makinson von dem *unendlichen* Ansatz abstrahiert und allgemeine kumulative Ableitungsrelationen $\mathbf{C}$ über *schwachen* Sprachen untersucht, gehen Kraus, Lehmann und Magidor von dem *finiten* Ansatz aus und legen eine *reiche* Sprache zugrunde, also eine Erweiterung der Aussagenlogik. Dabei bedeutet

- *reich*, daß die üblichen aussagenlogischen Junktoren $\neg, \wedge, \vee$ vorhanden sind und die den Modellen zugrundeliegende Gültigkeitsrelation $\models$ sich klassisch verhält,
- *schwach*, daß diese Junktoren nicht unbedingt vorhanden sein müssen und selbst wenn sie es sind, muß sich $\models$ nicht klassisch verhalten (zum Beispiel muß die Eigenschaft "$\mathcal{A} \models \alpha \wedge \beta$ $\underline{\text{gdw}}$ ($\mathcal{A} \models \alpha$ und $\mathcal{A} \models \beta$)" nicht gelten).

[1]Für einen Überblick über *monotone* Konsequenzrelationen konsultiere man [Avr87].

Im nächsten Abschnitt (4.1.1) diskutieren wir zunächst den allgemeinen Rahmen der diesem und auch dem nächsten Kapitel zugrundeliegt. Wir sind dann in der Lage, in Abschnitt 4.1.2 den kumulativen $\mathcal{K}^{\mathbf{cum}}$ und in Abschnitt 4.1.3 den präferentiellen Abschluß $\mathcal{K}^{\mathbf{pref}}$ einer Wissensbasis zu definieren. In Abschnitt 4.1.4 zeigen wir, wie neue Inferenzregeln in diesen Abschlüssen hergeleitet werden können. Schließlich stellen wir in Abschnitt 4.1.5 die allgemeinere Vorgehensweise von Makinson dar.

4.1.1 Der allgemeine Rahmen

Der allgemeine Rahmen in diesem Kapitel ist die Aussagenlogik. Wir betrachten also im folgenden nur aussagenlogische Formeln α, β. Außerdem formulieren wir Defaults direkt unter Zuhilfenahme von $\mid\sim$:

> *Wir stellen uns eine endliche Default Basis $\mathcal{K}$ vor, die aus Paaren $\alpha \mid\sim \beta$ besteht. Wir lassen auch sicheres Wissen in Form einer Theorie $\Sigma_{\mathbf{s}}$ zu.*

Etwas genauer ausgedrückt, liegt dem Ansatz von Kraus, Lehmann, Magidor und Makinson folgende Vorgehensweise zugrunde:

Default-Basis $\mathcal{K}$: Die vorgegebene Situation wird durch eine (endliche) Menge von *bedingten Behauptungen* (*conditional assertions*) der Form "$\alpha \mid\sim \beta$", wobei α, β aussagenlogische Ausdrücke sind, dargestellt. Diese Menge bildet die "Default-Basis" $\mathcal{K}$. Hierbei ist die Aussage "$\alpha \mid\sim \beta$" zu lesen als "*normalerweise (typischerweise, in der Mehrzahl aller Fälle, falls nichts dagegen spricht)* folgt aus α die Aussage β".

Abschluß von $\mathcal{K}$: Ausgehend von der Default-Basis $\mathcal{K}$ wird versucht, zusätzliche bedingte Behauptungen zu erschließen. Aus der Menge $\mathcal{K}$ von Aussagen der Form "$\alpha \mid\sim \beta$" werden also wieder Aussagen der Form "$\alpha \mid\sim \beta$" abgeleitet. Die Menge aller aus $\mathcal{K}$ abgeleiteten bedingten Aussagen heißt ein Abschluß von $\mathcal{K}$. Wir werden im folgenden verschiedene Abschlüsse von $\mathcal{K}$ betrachten.

Anfrage ?-c $\mid\sim$ d: Schließlich können wir eine Anfrage an $\mathcal{K}$ stellen. Diese Anfrage muß auch wieder von der Form "$\gamma \mid\sim \delta$" sein und sie wird mit "ja" oder "nein" beantwortet, je nachdem ob "$\gamma \mid\sim \delta$" im entsprechend gewählten Abschluß liegt.

Zunächst definieren wir die zugrundeliegende Sprache, mit der wir arbeiten wollen. Gegeben sei eine aussagenlogische Sprache $\mathcal{L}$. Wir betrachten die zugehörige Formelmenge $\mathbf{Fml}_{\mathcal{L}}$. Wir setzen voraus, daß $\mathcal{L}$ bezüglich der Junktoren $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$ und $\leftrightarrow$ abgeschlossen ist. Als Basis wählen wir wie üblich $\{\neg, \vee\}$ — alle anderen Junktoren sind durch sie darstellbar. Modelle und Erfüllbarkeit einer Formelmenge sowie Allgemeingültigkeit einer Formel seien wie üblich definiert (siehe Kapitel 2, Abschnitt 2.1).

Schließlich lassen wir noch eine ausgezeichnete Menge $\mathbf{W}$ von klassischen Strukturen zu. Sie repräsentieren das *sichere* Hintergrundwissen $\Sigma_{\mathbf{s}} :=_{\mathbf{def}} \mathbf{Cn}(\mathbf{W})$. Diese

Menge **W** wird sich auch in einigen der im nächsten Abschnitt darzustellenden Regeln widerspiegeln.

Analog zu [KLM90] setzen wir voraus:

> **Kompaktheit bezügl. W**: Eine Menge von Formeln ist erfüllbar bezüglich **W**, wenn alle ihre endlichen Teilmengen bezüglich **W** erfüllbar sind.

Wenn wir als **W** die Menge aller $\mathcal{L}$-Strukturen nehmen, ist diese Bedingung sicher erfüllt. Der Kompaktheitssatz (Kapitel 2, Theorem 2.1.14) sagt gerade aus, daß jede Menge **W** mit $\mathbf{W} = \mathrm{MOD}(\mathbf{Cn}(\mathbf{W}))$, also jede deduktiv abgeschlossene Menge, diese Bedingung erfüllt.

Definition 4.1.1 (Bedingte Behauptungen: $\alpha \mid\!\sim \beta$)
Seien α und β Formeln. Das Paar $\alpha \mid\!\sim \beta$ heißt eine bedingte Behauptung*.*
$\alpha \mid\!\sim \beta$ steht für "aus α folgt nichtmonoton β". Es bedeutet, daß wenn α wahr ist, man normalerweise *bereit ist, β als wahr anzusehen.*

Wir beschreiben nun wie ein vorgegebener Sachverhalt, aus dem man nichtmonotone Schlüsse ziehen möchte, mit Hilfe von bedingten Behauptungen zu formalisieren ist. Eine Wissensbasis, an die Anfragen gerichtet werden, besitzt verschiedene Arten von Informationen.

1. Die erste Art von Informationen sind die *harten* Fakten (zum Beispiel "Pinguine sind Vögel") und Definitionen (zum Beispiel "Kind sein" bedeutet "nicht erwachsen zu sein"). Solche Informationen sind als Formeln gegeben. **W** wird nun definiert als Menge der Strukturen, die alle diese Formeln erfüllen.

2. Die zweite Art von Informationen besteht aus einer Menge von *bedingten Behauptungen*, welche die *weichen* Fakten beschreiben (zum Beispiel "Vögel fliegen normalerweise", "Pinguine fliegen normalerweise nicht"). Diese Menge wird *Wissensbasis* $\mathcal{K}$ genannt.

3. Die dritte Art von Informationen beschreibt unser Wissen über eine bestimmte Situation (zum Beispiel "es ist ein Vogel") und wird durch eine Formel α in der Anfrage $\alpha \mid\!\sim \phi$ dargestellt.

Für Beispiel 1.4.1 ergibt sich etwa:

$$\mathbf{W} :=_{\mathbf{def}} \mathbf{MOD}(\{\mathbf{pinguin} \to \mathbf{vogel}\})$$
$$\mathcal{K} :=_{\mathbf{def}} \{\mathbf{vogel} \mid\!\sim \mathbf{fliegt}, \mathbf{pinguin} \mid\!\sim \neg\mathbf{fliegt}\}$$

Die Anfragen, die wir stellen können sind z.B.

$$\mathbf{pinguin} \land \mathbf{vogel} \mid\!\sim \neg\mathbf{fliegt} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{fliegt} \mid\!\sim \neg\mathbf{pinguin}.$$

Man beachte, daß nun, im Unterschied zu den Formalisierungen in Kapitel 1, 2 oder 3, jeder Vogel fliegt, bzw. jeder Pinguin nicht fliegt (denn die entsprechende Aussage ist ja explizit in der Basis enthalten). Interessant ist es nun zu fragen, ob auch unter der Annahme, daß ein Vogel und gleichzeitig ein Pinguin vorliegt, $\neg$**fliegt** immer noch gilt. Im Unterschied zur Default Logik könen wir nun auch fragen, ob *etwas das fliegt, normalerweise kein Pinguin ist*. In DL ist solch eine Aussage ein Default und die Ableitbarkeit von Defaults ist nicht definiert.

4.1.2 Der kumulative Abschluß $\mathcal{K}^{\mathbf{cum}}$

Der kumulative und der präferentielle Abschluß einer Datenbasis ergeben sich unter Benutzung von Inferenzregeln einer bestimmten Form, Horn-Regeln: *Wenn A und B dann C*. Dabei sind A, B und C *positive* Aussagen, genauer *bedingte Behauptungen.*

Das kumulative System, $\mathcal{C}$ *-System* basiert auf dem Vorschlag Gabbays. Es ist das schwächste System, das Kraus, Lehmann und Magidor vorstellen. Allgemein gilt, daß Regeln, die in schwächeren Systemen abgeleitet werden können, auch in stärkeren Systemen ableitbar sind.

Definition 4.1.2 (System $\mathcal{C}$, $\mathcal{K}^{\mathbf{cum}}$)
Man sagt eine Konsequenzrelation $\mid\sim$ *ist kumulativ, wenn sie unter den Ableitungsregeln* Reflexivität, Left Logical Equivalence, Right Weakening, Cut *und* Vorsichtige Monotonie *abgeschlossen ist.*

$\alpha \mid\sim \beta$ *liegt in* $\mathcal{K}^{\mathbf{cum}}$ $:\Longleftrightarrow_{\mathbf{def}}$ $\alpha \mid\sim \beta$ *ist aus* $\mathcal{K}$ *mit den Regeln aus* $\mathcal{C}$ *ableitbar.*

Die oben genannten Regeln werden im folgenden genauer betrachtet. Es sind sämtlich monotone Inferenzregeln im Sinne von Abschnitt 2.1.1 in Kapitel 2. Nun geht es allerdings nicht um die Ableitbarkeit einzelner Formeln α, β, sondern um die Ableitbarkeit von bedingten Behauptungen $\alpha \mid\sim \beta$.

$$\frac{}{\alpha \mid\sim \alpha} \qquad (\textit{Reflexivität})$$

Diese Inferenzregel mit leerer Prämissenmenge kann man auch als Axiomenschema deuten. Axiome der Form $\alpha \mid\sim \alpha$ sind immer wahr.

$$\frac{\models \alpha \Leftrightarrow \beta, \quad \alpha \mid\sim \gamma}{\beta \mid\sim \gamma} \qquad (\textit{Left Logical Equivalence})$$

Left Logical Equivalence drückt die Forderung aus, daß logisch äquivalente Formeln genau die gleichen Konsequenzen haben. Dabei steht $\models$ für die klassische logische Konsequenzrelation eingeschränkt auf $\mathbf{W}$. Genauer müßte man $\models \phi$ lesen als $\Sigma_{\mathbf{s}} \models \phi$ (dabei ist $\Sigma_{\mathbf{s}} :=_{\mathbf{def}} \mathbf{Cn}(\mathbf{W})$). Einfachheitshalber wird der Bezug auf $\mathbf{W}$ bzw $\Sigma_{\mathbf{s}}$, obwohl implizit immer vorhanden, unterdrückt.

$$\frac{\models \alpha \to \beta, \quad \gamma \mid\sim \alpha}{\gamma \mid\sim \beta} \qquad (\textit{Right Weakening})$$

Right Weakening drückt aus, daß alles, was aus möglichen Konsequenzen logisch folgt, ebenfalls eine Konsequenz ist. Aus *Reflexivität* und *Right Weakening* folgt, daß $\alpha \mid\sim \beta$ wenn $\alpha \models \beta$.

$$\frac{\alpha \wedge \beta \mid\sim \gamma, \quad \alpha \mid\sim \beta}{\alpha \mid\sim \gamma} \qquad (\textit{Cut})$$

Cut drückt aus, daß man bei der Suche nach einer Konklusion zuerst eine Hypothese zu den Fakten hinzufügen kann, um die Konklusion aus diesen so erweiterten

Fakten zu erhalten. Dann muß man aber die hinzugefügte Hypothese aus den ursprünglichen Fakten herleiten.

$$\frac{\alpha \mid\!\sim \beta, \quad \alpha \mid\!\sim \gamma}{\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma} \qquad (\textit{Vorsichtige Monotonie})$$

Vorsichtige Monotonie drückt aus, daß das Hinzufügen eines neuen Faktums, das schon bewiesen wurde, die bisherigen Konklusionen bestehen läßt.

Lemma 4.1.3 (Kumulativität)
Die Regeln Cut *und* Vorsichtige Monotonie *können zusammen auch wie folgt ausgedrückt werden: Wenn $\alpha \mid\!\sim \beta$ gilt, dann stimmen die Konsequenzen von α und $\alpha \wedge \beta$ überein:*

$$\textit{Für alle } \gamma \textit{ gilt: } \alpha \mid\!\sim \gamma \quad \underline{\text{gdw}} \quad (\alpha \wedge \beta) \mid\!\sim \gamma.$$

4.1.3 Der präferentielle Abschluß $\mathcal{K}^{\mathbf{pref}}$

Ein stärkeres System ist das $\mathcal{P}$-*System*:

Definition 4.1.4 (System $\mathcal{P}$, $\mathcal{K}^{\mathbf{pref}}$)
Das System $\mathcal{P}$ besteht aus allen Regeln von $\mathcal{C}$ und zusätzlich der folgenden Regel :

$$\frac{\alpha \mid\!\sim \gamma, \quad \beta \mid\!\sim \gamma}{\alpha \vee \beta \mid\!\sim \gamma} \qquad (\text{Oder})$$

Eine Konsequenzrelation, die alle Regeln von $\mathcal{P}$ erfüllt heißt präferentiell.

$\alpha \mid\!\sim \beta$ *liegt in* $\mathcal{K}^{\mathbf{pref}}$ $\;:\Longleftrightarrow_{\mathbf{def}}\;$ $\alpha \mid\!\sim \beta$ *ist aus $\mathcal{K}$ mit den Regeln aus $\mathcal{P}$ ableitbar.*

Oder besagt, daß eine Formel, die sowohl Konsequenz einer Formel α als auch Konsequenz einer Formel β ist, auch eine Konsequenz der Disjunktion $\alpha \vee \beta$ sein soll.

4.1.4 Allgemeine Beweistheorie

Wir zeigen in diesem Abschnitt, daß und wie man einige nützliche Regeln aus dem kumulativen bzw. dem präferentiellen System herleiten kann.

Einige abgeleitete Regeln im $\mathcal{C}$-System

Alle folgenden Regeln können in $\mathcal{C}$ hergeleitet werden

$$\frac{\alpha \mid\!\sim \beta, \quad \alpha \mid\!\sim \gamma}{\alpha \mid\!\sim \beta \wedge \gamma} \qquad (\textit{And})$$

$$\frac{\alpha \mid\!\sim \beta \rightarrow \gamma, \quad \alpha \mid\!\sim \beta}{\alpha \mid\!\sim \gamma} \qquad (\textit{MPC})$$

$$\frac{\alpha \mid\sim \beta,\ \beta \mid\sim \alpha,\ \alpha \mid\sim \gamma}{\beta \mid\sim \gamma} \qquad (\textit{Equivalence})$$

Diese letzte Regel wollen wir kurz herleiten. $\alpha \mid\sim \beta$ und $\alpha \mid\sim \gamma$ in *Vorsichtige Monotonie* eingesetzt, ergibt

$$\frac{\alpha \mid\sim \beta, \alpha \mid\sim \gamma}{\alpha \wedge \beta \mid\sim \gamma}.$$

Dieses Ergebnis zusammen mit *Left Logical Equivalence* ergibt:

$$\frac{\models \alpha \wedge \beta \leftrightarrow \beta \wedge \alpha,\ \alpha \wedge \beta \mid\sim \gamma}{\beta \wedge \alpha \mid\sim \gamma}.$$

Dieses wird nun zusammen mit $\beta \mid\sim \alpha$ in *Cut* eingesetzt:

$$\frac{\beta \wedge \alpha \mid\sim \gamma,\ \beta \mid\sim \alpha}{\beta \mid\sim \gamma}.$$

Einige abgeleitete Regeln im $\mathcal{P}$-System

Das Zusammenspiel von *Oder* und den Regeln von $\mathcal{C}$ macht aus $\mathcal{P}$ ein sehr mächtiges System. Hierzu folgendes

Lemma 4.1.5 (Ableitung der Regel (S))
Die Regel

$$\frac{\alpha \wedge \beta \mid\sim \gamma}{\alpha \mid\sim \beta \to \gamma} \qquad (\mathrm{S})$$

kann aus $\mathcal{P}$ hergeleitet werden.

Beweis: Der Beweis ist recht einfach: Aus $\alpha \wedge \beta \mid\sim \gamma$ erhält man mit *Right Weakening* $\alpha \wedge \beta \mid\sim \beta \to \gamma$. Außerdem gilt $\alpha \wedge \neg\beta \mid\sim \beta \to \gamma$. Mit *Oder* und *Left Logical Equivalence* erhält man daraus

$$\alpha \mid\sim \beta \to \gamma.$$

■

Eine weitere interessante Bedingung ist der *Loop*:

$$\frac{\alpha_0 \mid\sim \alpha_1,\quad \alpha_1 \mid\sim \alpha_2,\quad \cdots\quad ,\quad \alpha_{\mathbf{k}-1} \mid\sim \alpha_{\mathbf{k}},\quad \alpha_{\mathbf{k}} \mid\sim \alpha_0}{\alpha_0 \mid\sim \alpha_{\mathbf{k}}} \quad \text{für } \mathbf{k} \in \mathbb{N} \qquad (\textit{Loop}) \tag{4.1}$$

Diese Regel kann als eine eingeschränkte Transitivität angesehen werden. Sie sagt aus, daß, falls es einen Ringschluß gibt, alle $\alpha_{\mathbf{i}}$ äquivalent sind. Bemerkenswert bei *Loop* ist die Tatsache, daß in dieser Regel keine Junktoren auftreten. Trotzdem ist der Loop nicht im kumulativen System $\mathcal{C}$ sondern nur im präferentiellen System $\mathcal{P}$ herleitbar. Die folgende Herleitung von *Loop* in $\mathcal{P}$ stammt von Lehmann. Wir benötigen folgendes

Lemma 4.1.6
Aus $\alpha \mid\!\sim \beta$ *und* $\beta \mid\!\sim \gamma$ *folgt* $\alpha \vee \beta \mid\!\sim \gamma$.

Beweis: Da $\models (\alpha \vee \beta) \wedge \beta \leftrightarrow \beta$ folgt mit *Left Logical Equivalence* $(\alpha \vee \beta) \wedge \beta \mid\!\sim \gamma$. Mit *Oder* und *Reflexivität* folgt $\alpha \vee \beta \mid\!\sim \beta$. Mit *Cut*: $(\alpha \vee \beta) \mid\!\sim \gamma$. ■

Theorem 4.1.7 (Loop folgt aus $\mathcal{P}$)
Die Loop-Regel ist für jedes $\mathbf{k} \in \mathbb{N}$ *aus* $\mathcal{P}$ *herleitbar.*

Beweis: Die Herleitung von *Loop* in $\mathcal{P}$ erfolgt durch Induktion über die Länge $\mathbf{k}$ des Loops. Für $\mathbf{k} = 2$ folgt aus $\alpha_0 \mid\!\sim \alpha_1$ und $\alpha_1 \mid\!\sim \alpha_0$ trivialerweise $\alpha_0 \mid\!\sim \alpha_1$. Es sei nun die Prämisse der Regel *Loop* erfüllt, d.h. es gelte

$$\alpha_0 \mid\!\sim \alpha_1, \quad \alpha_1 \mid\!\sim \alpha_2, \cdots, \alpha_{\mathbf{k}-2} \mid\!\sim \alpha_{\mathbf{k}-1}, \quad \alpha_{\mathbf{k}-1} \mid\!\sim \alpha_0.$$

Es folgt mit dem Lemma, daß aus $\alpha_{\mathbf{k}-1} \mid\!\sim \alpha_0$ und $\alpha_0 \mid\!\sim \alpha_1$ auch $\alpha_{\mathbf{k}-1} \vee \alpha_0 \mid\!\sim \alpha_1$ folgt. Wir haben nun folgenden Loop der Länge $\mathbf{k} - 1$:

$$\alpha_{\mathbf{k}-1} \vee \alpha_0 \mid\!\sim \alpha_1, \quad \alpha_1 \mid\!\sim \alpha_2, \cdots, \alpha_{\mathbf{k}-2} \mid\!\sim \alpha_{\mathbf{k}-1} \vee \alpha_0.$$

Die letzte Beziehung erhalten wir durch die Regel *Right Weakening*. Nun können wir die Induktionsvoraussetzung anwenden (Konklusion der Loop-Regel):

$$\alpha_{\mathbf{k}-1} \vee \alpha_0 \mid\!\sim \alpha_{\mathbf{k}-2}.$$

Mittels *Right Weakening* schließen wir $\alpha_{\mathbf{k}-2} \mid\!\sim \alpha_{\mathbf{k}-1} \vee \alpha_0$ und mittels *Äquivalenz* $\alpha_{\mathbf{k}-1} \vee \alpha_0 \mid\!\sim \alpha_{\mathbf{k}-1}$. Wir erhalten nun durch *Oder*, $\alpha_{\mathbf{k}-1} \vee \alpha_0 \mid\!\sim \alpha_0$ und dann mit der *Vorsichtige Monotonie* das gewünschte Resultat:

$$\alpha_0 \mid\!\sim \alpha_{\mathbf{k}-1}.$$

■

Der Vollständigkeit halber erwähnen wir noch die Monotonie-Eigenschaft. Wir unterscheiden zwischen zwei Varianten:

$$\frac{\Sigma_{\mathbf{s}} \models \alpha \to \beta \quad , \quad \beta \mid\!\sim \gamma}{\alpha \mid\!\sim \gamma} \qquad (\textit{Monotonie}) \tag{4.2}$$

und

$$\frac{\alpha \mid\!\sim \gamma}{\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma} \qquad (\textit{starke Monotonie})$$

Lemma 4.1.8
Monotonie *und* starke Monotonie *sind äquivalent.*

Beweis: Offensichtlich folgt die *starke Monotonie* aus der *Monotonie*: Für α setze man $\alpha \wedge \beta$ ein. Dann ist die erste Prämisse wegen $\alpha \wedge \beta \models \beta$ erfüllt und es gilt: "Aus $\beta \mid\!\sim \gamma$ folgt $\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma$".

Umgekehrt folgt aus der *starken Monotonie* auch die *Monotonie*, wenn wir das System $\mathcal{C}$ voraussetzen. Es gelte die "starke Monotonie". Außerdem sei $\Sigma_{\mathbf{S}} \models \alpha \to \beta$ und $\beta \mid\!\sim \gamma$. Aus der ersten Prämisse schließen wir $\alpha \mid\!\sim \beta$ mittels *Right Weakening* und aus der zweiten mit der "starken" Monotonie $\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma$. Wir erhalten dann das Ergebnis durch den *Cut*. ■

Als letztes Beispiel betrachten wir die *Umkehrung von Oder*:

$$\frac{\alpha \vee \beta \mid\!\sim \gamma}{\alpha \mid\!\sim \gamma,\ \beta \mid\!\sim \gamma} \qquad (\textit{Umkehrung von Oder})$$

Diese Regel impliziert zusammen mit *Left Logical Equivalence* schon die Monotonie[2]: Nehmen wir $\alpha \mid\!\sim \gamma$ an. Da $\alpha \leftrightarrow (\alpha \vee (\alpha \wedge \beta))$ für alle β folgt mit *Left Logical Equivalence*: $\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \mid\!\sim \gamma$ und damit, wegen *Umkehrung von Oder*, $(\alpha \wedge \beta) \mid\!\sim \gamma$.

4.1.5 Der Ansatz von Makinson

Wir beenden diesen Abschnitt mit dem allgemeineren Ansatz von Makinson ([Mak89]), der keine Anforderungen an die zugrundeliegende Sprache stellt:

Definition 4.1.9 (Makinson)
Eine kumulative Folgerungsrelation $\mathbf{C}$ *auf einer schwachen Sprache* $\mathcal{L}$ *ist eine Abbildung* $\mathbf{C} : \mathbf{Pot}(\mathbf{Fml}_{\mathcal{L}}) \to \mathbf{Pot}(\mathbf{Fml}_{\mathcal{L}})$ *mit:*

(C-1) $\Phi \subseteq C(\Phi)$,

(C-2) $\Phi \subseteq \Psi \subseteq C(\Phi)$ *impliziert* $C(\Psi) \subseteq C(\Phi)$,

(C-3) $\Phi \subseteq \Psi \subseteq C(\Phi)$ *impliziert* $C(\Phi) \subseteq C(\Psi)$.

Die Philosophie hinter diesem Ansatz ist es, zuerst die rein abstrakten Eigenschaften der Kumulativität zu betrachten und dann erst die üblichen Junktoren zu berücksichtigen.

Wenn wir, wie im KLM-Ansatz, als Sprache die klassische Aussagenlogik $\mathcal{L}_{\mathbf{AL}}$ und $\mathbf{W}$ als Klasse ihrer Modelle zugrundelegen, so haben wir die übliche Folgerungsbeziehung $\mathbf{Cn}$ zur Verfügung. Zur besseren Unterscheidung, wollen wir in diesem Kapitel deutlicher $\mathbf{Cn}_{\mathbf{AL}}$ schreiben.

Wir können nun, zusätzlich zur Kumulativität, zwei interessante Bedingungen an $\mathbf{C}$ formulieren:

Supraklassisch: $\mathbf{Cn}_{\mathbf{AL}}(\Phi) \ \subseteq\ \mathbf{C}(\Phi)$,

Distributivität: $\mathbf{C}(\Phi) \cap \mathbf{C}(\Psi) \ \subseteq\ \mathbf{C}(\ \mathbf{Cn}_{\mathbf{AL}}(\Phi) \cap \mathbf{Cn}_{\mathbf{AL}}(\Psi)\ )$.

[2] Diesen nützlichen Hinweis verdanke ich David Makinson.

Wenn wir **Supraklassisch** fordern, kann die Bedingung (C-1) in Definition 4.1.9 weggelassen werden und wir können definieren:

Kumulativität: $\Phi \subseteq \Psi \subseteq \mathrm{C}(\Phi)$ impliziert $\mathrm{C}(\Phi) = \mathrm{C}(\Psi)$

Diese Bedingungen stehen nun in einem sehr engen Zusammenhang zu den oben definierten Regeln des KLM-Ansatzes. Wenn wir die Beziehung

$$\Psi \subseteq \mathbf{C}(\Phi) \;:\Longleftrightarrow_{\mathbf{def}}\; \Phi \mathrel{|\!\sim} \Psi$$

ausnutzen, so erhalten wir:

Kumulativität $\simeq$ *Vorsichtige Monotonie* und *Cut* (wenn *And* gilt):

1. Eine Hälfte der **Kumulativität** ergibt (formuliert mit $\mathrel{|\!\sim}$):
   "Aus $\alpha \mathrel{|\!\sim} \alpha \wedge \beta$ und $\alpha \mathrel{|\!\sim} \gamma$ folgt $\alpha \wedge \beta \mathrel{|\!\sim} \gamma$."
2. Die andere Hälfte impliziert: *"Aus $\alpha \mathrel{|\!\sim} \alpha \wedge \beta$ und $\alpha \wedge \beta \mathrel{|\!\sim} \gamma$ folgt $\alpha \mathrel{|\!\sim} \gamma$."*

Beide Regeln sind äquivalent zu *Vorsichtige Monotonie* und *Cut*, wenn *And* gilt.

Supraklassisch $\simeq$ *Reflexivität* und *Right Weakening* (wenn *Cut* gilt):

Supraklassisch sagt aus (formuliert mit $\mathrel{|\!\sim}$): *"Aus $\alpha \models \beta$ folgt $\alpha \mathrel{|\!\sim} \beta$."* Dies ist offenbar äquivalent zu *Reflexivität* und *Right Weakening* falls *Cut* gilt.

Distributivität $\simeq$ *Oder* und *Left Logical Equivalence*:

Distributivität (formuliert mit $\mathrel{|\!\sim}$) sagt:

"Aus $\alpha \mathrel{|\!\sim} \gamma$, $\beta \mathrel{|\!\sim} \gamma$, $\models \alpha \leftrightarrow \alpha'$ und $\models \beta \leftrightarrow \beta'$ folgt $\alpha' \vee \beta' \mathrel{|\!\sim} \gamma$."

Dies ist offensichtlich äquivalent zu *Oder* und *Left Logical Equivalence*.

4.2 Semantische Ansätze: Präferentielle Modelle

Sowohl Makinson als auch Kraus, Lehmann und Magidor definieren semantische Modelle, die in natürlicher Weise eine nichtmonotone Folgerungsrelation definieren. Wir bezeichnen Makinsons Modelle als *MAK-Modelle* und Kraus, Lehmann und Magidors Modelle als *KLM-Modelle*. Beide beweisen Repräsentationssätze der Form:

> *Jede Relation $\mathrel{|\!\sim}$ (bzw. $\mathbf{C}$), die gewisse Inferenzregeln erfüllt, ist die von einem KLM-Modell (bzw. MAK-Modell) induzierte.*

Wir führen auf der einen Seite den Begriff des *Reduktes* eines KLM-Modells ein: Dieses genügt, um die induzierte nichtmonotone Ableitungsrelation zu bestimmen. Auf der anderen Seite *erweitern* wir die ursprünglichen schwachen MAK-Modelle um eine monotone Konsequenzrelation als zusätzlichen Parameter.

Wir geben dann zwei äquivalente Charakterisierungen der Redukte von KLM-Modellen: diese sind genau die MAK-Modelle deren Erfüllbarkeitsrelation

- als Schnitt einer nicht leeren Familie von Erfüllbarkeitsrelationen, von denen jede sich *klassisch* verhält, darstellbar ist

oder

- gewissen syntaktischen Anforderungen genügt.

Als Korollar erhalten wir Charakterisierungen von speziellen Klassen von KLM-Modellen: den *kumulativen* und den *präferentiellen* KLM-Modellen.

Wie schon zu Beginn dieses Kapitels erwähnt, hat Shoham ([Sho86, Sho88]) zu einer gegebenen ersten-Stufe-Sprache und einer partiellen Ordnung auf der Menge der klassischen Modelle in dieser Sprache eine nichtmonotone Inferenzrelation $\mid\!\sim_{\prec}$ zwischen Mengen Φ von Formeln und einzelnen Formeln ϕ wie folgt definiert:

$\Phi \mid\!\sim_{\prec} \phi$ $\underline{\text{gdw}}$ ϕ gilt in jedem klassischen Modell von Φ, das minimal (bezüglich $\prec$) ist unter all jenen Modellen, die Φ erfüllen.

Verallgemeinerungen dieser Definition wurden in [Mak89] und [KLM90] gegeben. Kraus, Lehmann und Magidor beschränkten sich nicht auf *klassische Modelle*, sondern betrachteten allgemeinere Objekte, die sie *Zustände* nannten. An die Relation $\prec$ zwischen solchen Zuständen sind zunächst keine Anforderungen gestellt.

Obwohl die Formulierungen in [Mak89] und [KLM90] sich sehr ähneln, sind sie doch nicht äquivalent. Der augenfälligste Unterschied ist der, daß im letzteren Ansatz sowohl *Welten* als auch *Zustände* und eine *labelling-function*, die jedem Zustand eine nichtleere Menge von Welten zuordnet, benötigt werden.

Wir zeigen im folgenden, daß man die im KLM-Ansatz benötigten markierten Mengen von Welten durch eine Hintergrund-Konsequenzrelation und eine einzige Gültigkeitsrelation für die Zustände (wobei beide gewissen Bedingungen genügen müssen) ersetzen kann.

Wir führen in Abschnitt 4.2.1 den Begriff des schwachen Makinson Modells (MAK-Modell) ein und erweitern dieses durch Einführung einer geeignet eingeschränkten Hintergrund Konsequenzrelation. Wir definieren dann in Abschnitt 4.2.2 KLM-Modelle, deren Redukte und stellen die *kumulativen* und die *präferentiellen* KLM- bzw. MAK-Modelle vor. Schließlich geben wir im darauffolgenden Abschnitt 4.2.3 unsere Charakterisierung des Zusammenhangs der KLM- und MAK-Modelle an.

4.2.1 Schwache MAK-Modelle und MAK-Modelle

MAK-Modelle sind für jede beliebige Sprache $\mathcal{L}$, unabhängig davon, ob sie unter aussagenlogischen Junktoren abgeschlossen ist oder nicht, definiert.

Definition 4.2.1 (Schwaches MAK-Modell)
Ein schwaches MAK-Modell $\mathcal{S}$ für eine Sprache $\mathcal{L}$ ist ein Tripel $\mathcal{S} :=_{\mathbf{def}} (\mathbf{S}, \models\!\equiv, \prec)$ *mit:*

1. $\mathbf{S}$ *ist eine beliebige Menge, die Menge der* Zustände*;*
2. $\models\!\equiv$ *ist eine Teilmenge von* $\mathbf{S} \times \mathbf{Fml}_{\mathcal{L}}$*, die* Erfüllbarkeitsrelation*;*
3. $\prec$ *it eine binäre Relation auf* $\mathcal{S}$*, die* Präferenzrelation.

Für einen Zustand $\mathbf{s}$ *und eine Formel* $\phi \in \mathbf{Fml}_{\mathcal{L}}$ *sagen wir, daß* ϕ präferentiell in $\mathbf{s}$ gilt *und schreiben:*

$$\mathbf{s} \models\!\equiv_{\prec} \phi, \quad \underline{\text{gdw}} \quad \mathbf{s} \models\!\equiv \phi \textit{ und es gibt kein } \mathbf{s}' \in \mathbf{S} \textit{ mit } \mathbf{s}' \prec \mathbf{s} \textit{ und } \mathbf{s}' \models\!\equiv \phi.$$

Man beachte, daß die Elemente von $\mathbf{S}$ beliebige Objekte sind. Entsprechend ist $\prec$ eine beliebige binäre Relation auf $\mathbf{S}$: Zunächst werden keine Bedingungen an $\prec$ gestellt. Auch $\models\!\equiv$ ist eine beliebige Relation zwischen $\mathbf{S}$ und $\mathbf{Fml}_{\mathcal{L}}$. Selbst wenn $\mathbf{Fml}_{\mathcal{L}}$ abgeschlossen unter den klassischen aussagenlogischen Junktoren ist, verlangen wir nicht, daß $\models\!\equiv$ sie respektiert, i.e. daß gilt: $\mathbf{s} \models\!\equiv \alpha \wedge \beta$ $\underline{\text{gdw}}$ ($\mathbf{s} \models\!\equiv \alpha$ und $\mathbf{s} \models\!\equiv \beta$) und $\mathbf{s} \models\!\equiv \neg\alpha$ $\underline{\text{gdw}}$ nicht $\mathbf{s} \models\!\equiv \alpha$.

Wir benutzen das Zeichen $\models\!\equiv$ mit drei Strichen anstelle des üblichen $\models$, da wir in Kürze zwischen beiden unterscheiden wollen. Wir schreiben auch $\mathbf{s} \models\!\equiv \Phi$ anstatt des ausführlicheren $\mathbf{s} \models\!\equiv \phi$ für alle $\phi \in \Phi$.

Jedes MAK-Modell induziert eine nichtmonotone Inferenzrelation unter Benutzung von Shohams Regel wie folgt:

Definition 4.2.2 (Induzierte nichtmonotone Inferenzoperation $\mathbf{C}_{\mathcal{S}}$)
Für jedes MAK-Modell $\mathcal{S}$ definieren wir $C_{\mathcal{S}}$ durch die Regel:

$$\psi \in \mathbf{C}_{\mathcal{S}}(\Phi) \quad \underline{\text{gdw}} \quad \mathbf{s} \models\!\equiv \psi \textit{ für alle } \mathbf{s} \textit{ in } \mathbf{S} \textit{ mit } \mathbf{s} \models\!\equiv_{\prec} \Phi.$$

Wenn keine Verwechslungen zu befürchten sind, werden wir den Index von $\mathrm{C}_{\mathcal{S}}$ weglassen und einfach $\psi \in \mathbf{C}(\Phi)$ schreiben. Wie in Abschnitt 4.1 schon erwähnt, ist es oft sinnvoll, $\mathbf{C}$ als eine Relation $\mid\!\sim$ auszudrücken:

$$\Phi \mid\!\sim \psi \quad \underline{\text{gdw}} \quad \psi \in \mathbf{C}(\Phi).$$

Wir erinnern daran, daß eine Konsequenzrelation nach Tarski eine Operation mit den folgenden Eigenschaften ist:

Definition 4.2.3 (Konsequenzrelation Cons im Sinne von Tarski)
Eine Relation $\mathbf{Cons} : \mathbf{Pot}(\mathbf{Fml}_{\mathcal{L}}) \longrightarrow \mathbf{Pot}(\mathbf{Fml}_{\mathcal{L}})$ *heißt Konsequenzrelation im Sinne von Tarski* $:\Longleftrightarrow_{\mathbf{def}}$ *sie ist progressiv, abgeschlossen und monoton:*

1. $\Phi \subseteq \mathbf{Cons}(\Phi)$,
2. $\mathbf{Cons}(\Phi) = \mathbf{Cons}(\mathbf{Cons}(\Phi))$,
3. *für alle* $\Phi \subseteq \Phi' \subseteq \mathbf{Fml}_{\mathcal{L}}$*:* $\mathbf{Cons}(\Phi) \subseteq \mathbf{Cons}(\Phi')$.

Jedes MAK-Modell $\mathcal{S}$ induziert eine solche Konsequenzrelation $\mathbf{Cons}_\mathcal{S}$ in natürlicher Weise:

$$\psi \in \mathbf{Cons}_\mathcal{S}(\Phi) \;\; \underline{\text{gdw}} \;\; \mathbf{s}|\!\!\equiv\psi \text{ für jedes } \mathbf{s} \in \mathbf{S} \text{ mit } \mathbf{s}|\!\!\equiv\Phi.$$

Wenn wir beachten, daß $|\!\!\equiv_\prec$ eine Unterrelation von $|\!\!\equiv$ ist, sehen wir, daß $\mathbf{Cons}_\mathcal{S}(\Phi) \subseteq \mathbf{C}_\mathcal{S}(\Phi)$ für alle $\Phi \subseteq \mathbf{Fml}_\mathcal{L}$, oder kürzer geschrieben:

$$\mathbf{Cons}_\mathcal{S} \leq \mathbf{C}_\mathcal{S}.$$

Falls die zugrundeliegende Sprache $\mathcal{L}$ die klassischen aussagenlogischen Junktoren enthält und abgeschlossen unter ihnen ist (so daß die klassische Konsequenzrelation $\mathbf{Cn_{AL}}$ angewandt werden kann), ist es sehr nützlich, den Begriff des schwachen MAK-Modells zu erweitern:

Definition 4.2.4 (MAK-Modell)
Ein MAK-Modell für eine Sprache $\mathcal{L}$, die abgeschlossen unter den aussagenlogischen Junktoren ist, stellt ein Quadrupel $\mathcal{S} :=_{\mathbf{def}} (\mathbf{S}, |\!\!\equiv, \prec, \mathbf{Cons})$ dar mit:

1. $(\mathbf{S}, |\!\!\equiv, \prec)$ *ist ein schwaches MAK-Modell;*

2. $\mathbf{Cons}$ *ist eine Konsequenzoperation mit*

   (α) $\mathbf{Cons}$ *ist kompakt, i.e. wenn $\psi \in \mathbf{Cons}(\Phi)$ dann $\psi \in \mathbf{Cons}(\Phi_0)$ für ein endliches $\Phi_0 \subseteq \Phi$,*

   (β) $\mathbf{Cn_{AL}} \leq \mathbf{Cons} \leq \mathbf{C}_\mathcal{S}$,

   (γ) $\mathbf{Cons}$ *erfüllt "Disjunktion im Antezedens", i.e. für alle $\Phi \cup \{\alpha, \beta, \gamma\} \subseteq \mathbf{Fml}_\mathcal{L}$:*

   $$\textit{Falls } \gamma \in \mathbf{Cons}(\Phi \cup \{\alpha\}) \cap \mathbf{Cons}(\Phi \cup \{\beta\}) \textit{ dann } \gamma \in \mathbf{Cons}(\Phi \cup \{\alpha \vee \beta\}).$$

Falls für $\mathbf{Cons}$ die klassische Relation $\mathbf{Cn_{AL}}$ gewählt wird, sind die Bedingungen (α) und (γ) automatisch erfüllt. Klar ist auch, daß ein schwaches MAK-Modell $\mathcal{S} = (\mathbf{S}, |\!\!\equiv, \prec)$ genau dann eine Erweiterung $(\mathbf{S}, |\!\!\equiv, \prec, \mathbf{Cons})$ besitzt, wenn $\mathbf{Cn_{AL}} \leq \mathbf{Cons}_\mathcal{S}$: Erweiterungen sind aber im allgemeinen nicht eindeutig.

4.2.2 KLM-Modelle und ihre Redukte

KLM-Modelle sind nur für Sprachen $\mathcal{L}$ definiert, die abgeschlossen unter den klassischen aussagenlogischen Junktoren sind:

Definition 4.2.5 (KLM-Modell)
Ein KLM-Modell ist ein Quadrupel $\mathcal{S} :=_{\mathbf{def}} (\mathbf{S}, \mathbf{W}, \mathbf{l}, \prec)$ mit:

1. $\mathbf{S}$ *ist eine beliebige Menge, die Menge der* Zustände.

2. $\mathbf{W}$ *ist eine nicht leere Menge von klassischen aussagenlogischen Modellen für* $\mathcal{L}$*, genannt die Menge der* Welten. *Diese Welten kann man auch als Teilmengen von* $\mathbf{Fml}_{\mathcal{L}}$ *ansehen, die maximal konsistent bezüglich* $\mathbf{Cn_{AL}}$ *sind. Wir setzen nicht voraus, daß alle klassischen Modelle für* $\mathcal{L}$ *in* $\mathbf{W}$ *enthalten sind. Allerdings setzen wir voraus, daß* $\mathbf{W}$ kompakt *ist: Wenn es für jedes endliche* $\Phi_0 \subseteq \Phi$ *ein* $\mathbf{w}_0 \in \mathbf{W}$ *mit* $\Phi_0 \subseteq \mathbf{w}_0$ *gibt, dann gibt es auch ein* $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ *mit* $\Phi \subseteq \mathbf{w}$.

3. $\mathbf{l} : \mathbf{S} \longrightarrow \mathbf{Pot}(\mathbf{W})$ *ist eine Funktion, die* labelling-function*, die jedem Zustand eine nicht leere Menge von Welten zuordnet.*

4. $\prec$ *ist irgendeine binäre Relation über* $\mathbf{S}$*, die* Präferenzrelation.

Man beachte, daß weder die Menge $\mathbf{W}$ *der* Welten *noch die labelling-function* $\mathbf{l}$ *in MAK-Modellen vorkommt. Wir schreiben* $\models$ *für die Erfüllbarkeitsrelation, die durch* $\mathbf{W}$ *bestimmt ist, d.h.* $\mathbf{w} \models \phi \quad :\Longleftrightarrow_{\mathbf{def}} \quad \mathbf{w}(\phi) = 1$ *oder* $\phi \in \mathbf{w}$ *je nachdem, wie man eine Welt darstellen will.*

Ausgehend von der Gültigkeitsrelation $\models$ *auf Welten, definieren Kraus, Lehmann und Magidor eine* abgeleitete *Relation* $\models\!\equiv$ *auf Zuständen:*

$$\mathbf{s} \models\!\equiv \phi \ \ \underline{\text{gdw}} \ \ \mathbf{w} \models \phi \text{ für alle } \mathbf{w} \text{ in } \mathbf{l}(\mathbf{s}).$$

Analog zu Definition 4.2.4 definieren sie $\mathbf{s} \models\!\equiv_{\prec} \phi$ *unter Benutzung von* $\models\!\equiv$*:*

$$\mathbf{s} \models\!\equiv_{\prec} \phi \quad \underline{\text{gdw}} \ \ \mathbf{s} \models\!\equiv \phi \text{ und es gibt kein } \mathbf{s}' \in \mathbf{S} \text{ mit } \mathbf{s}' \prec \mathbf{s} \text{ und } \mathbf{s}' \models\!\equiv \phi.$$

Entsprechend ist die induzierte *nichtmonotone* Konsequenzrelation wie für MAK Modelle definiert.

Definition 4.2.6 (Induzierte nichtmonotone Inferenzoperation $\mid\!\sim_{\mathcal{S}}$)
Für ein KLM-Modell $\mathcal{S}$ *definieren wir* $\mid\!\sim_{\mathcal{S}}$ *durch die Regel:*

$$\Phi \mid\!\sim_{\mathcal{S}} \psi \ \ \underline{\text{gdw}} \ \ \mathbf{s} \models\!\equiv \psi \text{ für alle } \mathbf{s} \text{ in } \mathbf{S} \text{ mit } \mathbf{s} \models\!\equiv_{\prec} \Phi.$$

Offensichtlich haben weder $\mathbf{W}$ noch $\mathbf{l}$ Auswirkungen auf die induzierte nichtmonotone Konsequenzrelation, wenn $\models\!\equiv$ zusammen mit $\mathbf{S}$ und $\prec$ gegeben ist. $\mathbf{W}$ spielt allerdings eine Rolle, wenn es darum geht, die Relation $\mathbf{Cn_W}$ (die in Kraus, Lehmann, Magidors Formalismus in den Regeln *Right Weakening, Left Logical Equivalence* vorkommt) zu bestimmen. Wir definieren daher:

Definition 4.2.7 (KLM-Redukt)
Jedes KLM-Modell $\mathcal{S} :=_{\mathbf{def}} (\mathbf{S}, \mathbf{W}, \mathbf{l}, \prec)$ *induziert eine Struktur* $(\mathbf{S}', \models\!\equiv, \prec', \mathbf{Cn_W})$ *, genannt ihr* Redukt*, indem man setzt:*

1. $\mathbf{S}' :=_{\mathbf{def}} \mathbf{S}$,

2. $\models\!\equiv$ *ist die von* $\mathcal{S}$ *abgeleitete Erfüllbarkeitsrelation,*

3. $\prec' :=_{\mathbf{def}} \prec$,

4. $\mathbf{Cn_W}(\Phi) :=_{\mathbf{def}} \{\psi : \mathbf{w} \models \psi$ *für alle* $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ *mit* $\mathbf{w} \models \Phi\}$.

Wenn zwei KLM-Modelle dasselbe Redukt haben, induzieren sie die gleiche nichtmonotone Inferenzoperation.

Bevor wir im nächsten Abschnitt unser angekündigtes Theorem formulieren, machen wir einige Bemerkungen über die Benutzung des Terminus *präferentielles Modell* in der Literatur.

Die allgemeinsten Modelle, die von Kraus, Lehmann und Magidor betrachtet werden, sind die KLM-Modelle (wie oben definiert), in denen die Präferenzrelation $\prec$ die Bedingung der *smoothness*[3] erfüllt. Diese Bedingung ist wie folgt definiert:

Definition 4.2.8 (Kumulative KLM und MAK-Modelle, Smoothness) *Ein KLM-Modell (bzw. MAK-Modell) heißt kumulativ, falls es die folgende Bedingung der smoothness erfüllt: Für jede Formel* α *und für jedes* $\mathbf{s} \in \mathbf{S}$ *gilt:*

Falls $\mathbf{s} \models\!\!\equiv \alpha$, *dann entweder* $\mathbf{s} \models\!\!\equiv_{\prec} \alpha$, *oder es gibt ein* $\mathbf{s}' \in \mathbf{S}$ *mit* $\mathbf{s}' \prec \mathbf{s}$ *und* $\mathbf{s}' \models\!\!\equiv_{\prec} \alpha$.

Diese Bedingung schließt gerade aus, daß es unendlich absteigende Ketten gibt, in denen jeder Zustand eine Formel α erfüllt. Die Relation $\prec$ ist also *wohlfundiert* bezüglich Ketten die eine feste Formel α erfüllen.

Präferentielle Modelle sind für Kraus, Lehmann und Magidor eine noch eingeschränktere Klasse, nämlich die kumulativen Modelle, in denen $\prec$ irreflexiv und transitiv ist und in denen $\mathbf{l}(\mathbf{s})$ für alle $\mathbf{s} \in \mathbf{S}$ nur aus einem einzigen Element besteht ([KLM90, Definition 5.6]).

Definition 4.2.9 (Präferentielle KLM und MAK-Modelle) *Ein kumulatives KLM-Modell heißt präferentiell, falls* $\prec$ *irreflexiv und transitiv ist und zusätzlich* $\mathbf{l}(\mathbf{s})$ *für alle* $\mathbf{s} \in \mathbf{S}$ *nur aus einem einzigen Element besteht.*

Ein kumulatives MAK-Modell heißt präferentiell, falls $\prec$ *irreflexiv und transitiv ist.*

Shohams ursprüngliche präferentielle Modelle sind sogar noch spezieller. Sie können mit den präferentiellen Modellen im Sinne von Kraus, Lehmann und Magidor identifiziert werden, in denen $\mathbf{W}$ die Klasse *aller* klassischen Modelle von $\mathcal{L}$ ist, für die $\mathbf{S} = \mathbf{W}$ gilt und die labelling-function $\mathbf{l}$ die Injektion $\mathbf{w} \to \{\mathbf{w}\}$ ist. Schließlich benutzt Makinson in [Mak89] den Begriff *präferentielles Modell*, um das zu bezeichnen, was wir kurz schwaches MAK-Modell genannt haben.

4.2.3 Äquivalenz von KLM- und MAK-Modellen

Wir definieren zunächst was es heißt, daß eine Relation $\models\!\!\equiv$ sich klassisch verhält:

Definition 4.2.10 ($\models\!\!\equiv$ verhält sich klassisch)
$\models\!\!\equiv$ *verhält sich klassisch* $:\Longleftrightarrow_{\mathbf{def}}$ *für alle* $\mathbf{s} \in \mathbf{S}$ *und* $\alpha, \beta \in \mathbf{Fml}_{\mathcal{L}}$ *gilt:*

- $\mathbf{s} \models\!\!\equiv (\alpha \wedge \beta)$ $\underline{\text{gdw}}$ ($\mathbf{s} \models\!\!\equiv \alpha$ *und* $\mathbf{s} \models\!\!\equiv \beta$),

[3] Diese Bedingung ist auch unter dem Namen *stoppering* in dem unendlichen Ansatz von [Mak89] bekannt.

- *"nicht* $\mathbf{s}\models\alpha$*"* $\Longrightarrow$ *"*$\mathbf{s}\models\neg\alpha$*",*
- $\mathbf{s}\models(\alpha\wedge\neg\alpha)$ <u>gdw</u> $\mathbf{s}\models\Box$.

Theorem 4.2.11 (KLM vs. MAK)
Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache, die abgeschlossen unter den klassischen aussagenlogischen Junktoren ist und $\mathcal{S} :=_{\mathbf{def}} (\mathbf{S}, \models, \prec, \mathbf{Cons})$ eine Struktur. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(1) $\mathcal{S}$ ist das Redukt eines KLM-Modells für $\mathcal{L}$;

(2) $\mathcal{S}$ ist ein MAK-Modell, dessen Erfüllbarkeitsrelation $\models$ als Durchschnitt einer nicht leeren Familie von Erfüllbarkeitsrelationen $\models_{\mathbf{i}}$, von denen jede sich klassisch *verhält, darstellbar ist;*

(3) $\mathcal{S}$ ist ein MAK-Modell, dessen Erfüllbarkeitsrelation $\models$ folgende Bedingungen für alle $\mathbf{s}\in\mathbf{S}$ erfüllt:

(a) $\mathbf{s}\models\alpha$ und $\mathbf{s}\models\beta$ impliziert $\mathbf{s}\models\alpha\wedge\beta$,

(b) Es gibt Formeln α und β mit $\mathbf{s}\models\alpha$ und nicht $\mathbf{s}\models\beta$.

Man beachte, daß in obigem Theorem nicht von kumulativen oder präferentiellen KLM-Modellen die Rede ist. Die entsprechenden Aussagen für diese Modelle ergeben sich aber sofort als Korollare:

Korollar 4.2.12 (Kumulatives KLM- vs. kumulatives MAK-Modell)
Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache, die abgeschlossen unter den klassischen aussagenlogischen Junktoren ist und $\mathcal{S} :=_{\mathbf{def}} (\mathbf{S}, \models, \prec, \mathbf{Cons})$ eine Struktur. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

1. *$\mathcal{S}$ ist das Redukt eines kumulativen KLM-Modells für $\mathcal{L}$;*
2. *$\mathcal{S}$ ist ein kumulatives MAK-Modell dessen Erfüllbarkeitsrelation $\models$ die beiden obigen Bedingungen (a) und (b) aus (3) von Theorem 4.2.11 erfüllt.*

Korollar 4.2.13 (Präferentielles KLM- vs. präferentielles MAK-Modell)

Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache, die abgeschlossen unter den klassischen aussagenlogischen Junktoren ist und $\mathcal{S} :=_{\mathbf{def}} (\mathbf{S}, \models, \prec, \mathbf{Cons})$ eine Struktur. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

1. *$\mathcal{S}$ ist das Redukt eines präferentiellen KLM-Modells für $\mathcal{L}$;*
2. *$\mathcal{S}$ ist ein präferentielles MAK-Modell dessen Erfüllbarkeitsrelation $\models$ sich klassisch verhält.*

Für einen ausführlichen Beweis verweisen wir auf [DM92].

4.3 Darstellungssätze: Axiomatik vs. Semantik

Der erste Darstellungssatz betrifft schwache MAK-Modelle und ist recht einfach zu beweisen (siehe [Mak89]):

Lemma 4.3.1 (Makinson)
Sei $\mathcal{S} :=_{\mathbf{def}} (\mathbf{S}, \models\!\equiv, \prec)$ *ein schwaches MAK-Modell und* $\mathbf{C}$ *eine Inferenzrelation im Sinne von Tarski.*

a) Ist $\mathcal{S}$ Φ*-smooth für jedes* $\Phi \subseteq \mathbf{Fml}_{\mathcal{L}}$*, dann ist* $\mathbf{C}_{\mathcal{S}}$ *kumulativ.*

b) Ist $\mathbf{C}$ *kumulativ, dann gibt es ein MAK-Modell* $\mathcal{S}$*, so daß* $\mathbf{C}_{\mathcal{S}}=\mathbf{C}$ *und* $\mathcal{S}$ *ist* Φ*-smooth für jedes* $\Phi \subseteq \mathbf{Fml}_{\mathcal{L}}$*.*

Selbst wenn man in b) voraussetzt, daß $\mathbf{C}$ die Junktoren $\neg$ und $\vee$ respektiert, wird das korrespondierende MAK-Modell dies nicht tun.

Während, wie wir gleich sehen werden, kumulative und präferentielle Folgerungsrelationen $\mid\!\sim$ zwischen *endlichen* Formelmengen (finiter Ansatz, siehe die Diskussion am Anfang dieses Kapitels) durch kumulative, bzw. präferentielle KLM-Modelle dargestellt werden können, trifft dies nicht für unendliche Folgerungsrelationen $\mathbf{C}$ zu (siehe [Sch90b]):

> *Nicht jede (unendliche) Konsequenzrelation* $\mathbf{C}$*, die supraklassisch, kumulativ und distributiv ist, kann als ein präferentielles KLM-Modell dargestellt werden.*

Für die beiden folgenden Theoreme wollen wir eine aussagenlogische Signatur $\mathcal{L}$ und eine kompakte Menge $\mathbf{W}$ (sie entspricht der in Abschnitt 4.1 betrachteten Menge $\mathbf{W}$) von klassischen Modellen voraussetzen.

Theorem 4.3.2 ($\mathcal{C}$ ist korrekt und vollständig, [KLM90])
Sei $\mid\!\sim\ \subseteq \mathbf{Fml}_{\mathcal{L}} \times \mathbf{Fml}_{\mathcal{L}}$ *eine Relation zwischen endlichen Formelmengen.*

$\mid\!\sim$ *erfüllt die Regeln des Systems* $\mathcal{C}$

gdw

Es gibt ein kumulatives KLM-Modell $(\mathbf{S}, \mathbf{W}, \mathbf{l}, \prec)$ *mit:* $\mid\!\sim\ =\ \mid\!\sim_{\mathcal{S}}$*.*

gdw

Es gibt ein kumulatives MAK-Modell $(\mathbf{S}, \models\!\equiv, \prec, \mathbf{Cons})$ *mit:*
$\models\!\equiv$ *verhält sich klassisch und* $\mid\!\sim\ =\ \mid\!\sim_{\mathcal{S}}$*.*

Theorem 4.3.3 ($\mathcal{P}$ ist korrekt und vollständig, [KLM90])
Sei $\mid\!\sim\ \subseteq \mathbf{Fml}_{\mathcal{L}} \times \mathbf{Fml}_{\mathcal{L}}$ *eine Relation zwischen endlichen Formelmengen.*

$\mid\!\sim$ *erfüllt die Regeln des Systems* $\mathcal{P}$

gdw

Es gibt ein präferentielles KLM-Modell $(\mathbf{S}, \mathbf{W}, \mathbf{l}, \prec)$ *mit:* $\mid\!\sim\ =\ \mid\!\sim_{\mathcal{S}}$*.*

<u>gdw</u>

Es gibt ein präferentielles MAK-Modell $(\mathbf{S}, \models\!\equiv, \prec, \mathbf{Cons})$ *mit:*
$\models\!\equiv$ *verhält sich klassisch und* $\mid\!\sim \; = \; \mid\!\sim_{\mathcal{S}}$.

4.3.1 Die Korrektheit von $\mathcal{P}, \mathcal{C}$

Wir haben zu zeigen, daß für jedes kumulative KLM-Modell $(\mathbf{S}, \mathbf{W}, \mathbf{l}, \prec)$ die induzierte Inferenzrelation $\mid\!\sim_{\mathcal{S}}$ kumulativ ist und daß für jedes präferentielle Modell $(\mathbf{S}, \mathbf{W}, \mathbf{l}, \prec)$ die induzierte Inferenzrelation $\mid\!\sim_{\mathcal{S}}$ präferentiell ist. Wegen der Korollare 4.2.12 und 4.2.13 genügt es, dies für die entsprechenden MAK-Modelle zu tun.

Gegeben sei zunächst ein kumulatives MAK-Modell $\mathcal{S} :=_{\mathbf{def}} (\mathbf{S}, \models\!\equiv, \prec, \mathbf{Cons})$.

- **Cut:** Sei $\alpha \mid\!\sim \beta$ und $\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma$. Wir haben zu zeigen, daß

  $$\mathbf{s} \models\!\equiv \gamma \text{ für alle } \mathbf{s} \in \mathbf{S} \text{ mit } \mathbf{s} \models\!\equiv_{\prec} \alpha.$$

  Sei also $\mathbf{s} \models\!\equiv_{\prec} \alpha$, dann ist auch $\mathbf{s} \models\!\equiv \beta$ (wegen der Voraussetzung $\alpha \mid\!\sim \beta$). Also gilt auch $\mathbf{s} \models\!\equiv \alpha \wedge \beta$ (laut Theorem 4.2.11 *(3)(a)*) und damit $\mathbf{s} \models\!\equiv \gamma$. ■

- **Vorsichtige Monotonie:** Sei $\alpha \mid\!\sim \beta$ und $\alpha \mid\!\sim \gamma$. Wir haben zu zeigen, daß

  $$\mathbf{s} \models\!\equiv \gamma \text{ für alle } \mathbf{s} \in \mathbf{S} \text{ mit } \mathbf{s} \models\!\equiv_{\prec} \alpha \wedge \beta.$$

  Sei $\mathbf{s}$ ein solcher minimaler Zustand für $\alpha \wedge \beta$. Wir unterscheiden 2 Fälle:

  - *1. Fall:* $\mathbf{s} \models\!\equiv_{\prec} \alpha$. Dann gilt aber auch $\mathbf{s} \models\!\equiv \gamma$, da $\alpha \mid\!\sim \gamma$ und wir sind fertig.

  - *2. Fall:* Sonst $\exists \mathbf{s}' \prec \mathbf{s}$ mit $\mathbf{s}' \models\!\equiv_{\prec} \alpha$. Das heißt aber (da $\alpha \mid\!\sim \beta$), daß $\mathbf{s}' \models\!\equiv \beta$. Also gilt (abermals wegen Theorem 4.2.11 *(3)(a)*) $\mathbf{s}' \models\!\equiv \alpha \wedge \beta$. Dies steht im Widerspruch zur Minimalität von $\mathbf{s}$. ■

Die bisherigen Folgerungen gelten natürlich erst recht für ein präferentielles Modell. Für solch ein Modell müssen wir nur noch die Oder-Regel zeigen.

- **ODER:** Sei $\alpha \mid\!\sim \gamma$ und $\beta \mid\!\sim \gamma$. Wir haben zu zeigen, daß

  $$\mathbf{s} \models\!\equiv \gamma \text{ für alle } \mathbf{s} \in \mathbf{S} \text{ mit } \mathbf{s} \models\!\equiv_{\prec} \alpha \vee \beta.$$

  Aus $\mathbf{s} \models\!\equiv_{\prec} \alpha \vee \beta$ folgt wegen Korollar 4.2.13, daß $\mathbf{s} \models\!\equiv \alpha$ oder $\mathbf{s} \models\!\equiv \beta$. Wäre nicht $\mathbf{s} \models\!\equiv_{\prec} \alpha$ (bzw. $\mathbf{s} \models\!\equiv_{\prec} \beta$), so gäbe es ein $\mathbf{s}' \prec \mathbf{s}$ (bzw. $\mathbf{s}'' \prec \mathbf{s}$), mit $\mathbf{s}' \models\!\equiv \alpha \vee \beta$ (bzw. $\mathbf{s}'' \models\!\equiv \alpha \vee \beta$), dies ist jedoch ein Widerspruch zur Minimalität von $\mathbf{s}$. ■

4.3.2 Die Vollständigkeit von $\mathcal{P}, \mathcal{C}$

Wir haben zu zeigen, daß es zu jeder kumulativen Relation $\mid\!\sim$ ein kumulatives Modell $\mathcal{S} :=_{\mathbf{def}} (\mathbf{S}, \models\!\equiv, \prec, \mathbf{Cons})$ mit $\mid\!\sim \; = \; \mid\!\sim_{\mathcal{S}}$ und zu jeder präferentiellen Relation $\mid\!\sim$ ein präferentielles Modell $\mathcal{S}$ mit $\mid\!\sim \; = \; \mid\!\sim_{\mathcal{S}}$ gibt. Diese Beweise sind etwas aufwendiger und benötigen einige zusätzliche Terminologie. Man beachte, daß mit $\mid\!\sim$ auch gleichzeitig eine Theorie $\Sigma_{\mathbf{s}}$ bzw. eine Menge von klassischen Strukturen $\mathbf{W} = \mathbf{MOD}(\Sigma_{\mathbf{s}})$ gegeben ist.

Definition 4.3.4 (Normale Welten)
Sei $\mid\!\sim$ *und* $\Sigma_{\mathbf{s}}$ *gegeben. Sei* $\mathbf{W} :=_{\mathbf{def}} MOD(\Sigma_{\mathbf{s}})$. $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ *heißt normal für* $\alpha \in \mathbf{Fml}_{\mathcal{L}}$ $:\Longleftrightarrow_{\mathbf{def}}$

$$\forall \beta\, (\alpha \mid\!\sim \beta \;\Rightarrow\; \mathbf{w} \models \beta)$$

Lemma 4.3.5
Falls $\mid\!\sim$ *(Reflexivität), (Right Weakening) und (And) erfüllt, dann gilt:*

$\alpha \mid\!\sim \beta$ $\underline{\text{gdw}}$ *alle normalen Welten, die* α *erfüllen, erfüllen auch* β.

Vollständigkeit von $\mathcal{C}$

Wir setzen jetzt voraus, daß $\mid\!\sim$ alle Regeln aus $\mathcal{C}$ erfüllt. Zunächst brauchen wir:

Definition 4.3.6 ($\alpha \sim \beta$)

$$\alpha \sim \beta \;\; :\Longleftrightarrow_{\mathbf{def}} \;\; \alpha \mid\!\sim \beta \,\mathbf{und}\, \beta \mid\!\sim \alpha$$

Lemma 4.3.7 (Eigenschaften von $\sim$)

1. $\alpha \sim \beta$ $\underline{\text{gdw}}$ $\forall \gamma (\alpha \mid\!\sim \gamma \Leftrightarrow \beta \mid\!\sim \gamma)$,
2. $\sim$ *ist eine Äquivalenzrelation auf* $\mathbf{Fml}_{\mathcal{L}}$.
3. *Die auf den Äquivalenzklassen* $\hat{\alpha}$ *von* $\sim$ *definierte Relation*

$$\hat{\alpha} \leq \hat{\beta} \;\; :\Longleftrightarrow_{\mathbf{def}} \;\; \exists\, \alpha' \in \hat{\alpha} \text{ so daß } \beta \mid\!\sim \alpha'$$

ist reflexiv und antisymmetrisch.

Definition 4.3.8 (Konstruktion des Modells für $\mathcal{C}$)
Wir definieren $\mathcal{S} :=_{\mathbf{def}} (\mathbf{S}, \models\!\equiv, \prec, \mathbf{Cons})$ *wie folgt:*

- $\mathbf{S} :=_{\mathbf{def}} \mathcal{L}/\sim$, *also die Menge der Äquivalenzklassen,*
- $\hat{\alpha} \models\!\equiv \gamma \;\; :\Longleftrightarrow_{\mathbf{def}} \;\; \gamma$ *gilt in allen für* α *normalen Welten,*
- $\hat{\alpha} \prec \hat{\gamma} \;\; :\Longleftrightarrow_{\mathbf{def}} \;\; \hat{\alpha} \leq \hat{\beta}$ *und* $\hat{\alpha} \neq \hat{\beta}$,
- $\mathbf{Cons}(\phi) :=_{\mathbf{def}} \{\psi : \forall\, \mathbf{w} \in \mathbf{W}\ (\mathbf{w} \models \phi \Rightarrow \mathbf{w} \models \psi)\}$.

Es bleibt zu zeigen, daß $\mid\!\sim_{\mathcal{S}} \, = \, \mid\!\sim$ und $\mathcal{S}$ ein kumulatives MAK-Modell ist. Dies ist unter Benutzung der beiden obigen Lemmas sehr einfach und sei deshalb dem Leser überlassen.

Vollständigkeit von $\mathcal{P}$

Wir setzen jetzt voraus, daß $\mid\!\sim$ alle Regeln aus $\mathcal{P}$ erfüllt.

Definition 4.3.9 (Konstruktion des Modells für $\mathcal{P}$)
Zunächst sei

$$\alpha \leq \beta \ :\Longleftrightarrow_{\mathbf{def}} \ \alpha \vee \beta \mid\!\sim \alpha.$$

Wir definieren $\mathcal{S} = (\mathbf{S}, \models\!\!\!\equiv, \prec, \mathbf{Cons})$ *wie folgt:*

- $\mathbf{S} :=_{\mathbf{def}} \{(\mathbf{w}, \alpha) : \ \mathbf{w} \in \mathbf{W}$ *ist normal für* α, $\alpha \in \mathcal{L}\}$,
- $(\mathbf{w}, \alpha) \models\!\!\!\equiv \gamma \quad :\Longleftrightarrow_{\mathbf{def}} \ \mathbf{w} \models \gamma$,
- $(\mathbf{w}, \alpha) \prec (\mathbf{w}, \beta) \quad :\Longleftrightarrow_{\mathbf{def}} \ \alpha \leq \beta$ *und* $\mathbf{w} \not\models \beta$,
- $\mathbf{Cons}(\phi) :=_{\mathbf{def}} \{\psi : \forall\, \mathbf{w} \in \mathbf{W} \ (\mathbf{w} \models \phi \Rightarrow \mathbf{w} \models \psi)\}$.

Es bleibt zu zeigen, daß $\mid\!\sim_{\mathcal{S}} = \ \mid\!\sim$ und $\mathcal{S}$ ein präferentielles MAK-Modell ist. Dies ist wiederum nur eine Fleißaufgabe und sei deshalb dem Leser überlassen.

4.4 Bemerkungen zu $\mathcal{K}^{\mathbf{cum}}$ und $\mathcal{K}^{\mathbf{pref}}$

Ist eine Wissensbasis $\mathcal{K}$ gegeben, so stellt jedes kumulative (bzw. präferentielle) Modell $\mathcal{S}$ von $\mathcal{K}$ eine kumulative (bzw. präferentielle) Erweiterung von $\mathcal{K}$ dar. Unsere Vollständigkeitssätze des letzten Kapitels sagen also, daß der kumulative (bzw. präferentielle) Abschluß von $\mathcal{K}$ gerade die Menge aller $\alpha \mid\!\sim \beta$ ist,

- die in allen kumulativen (bzw. präferentiellen) Modellen von $\mathcal{K}$ gelten.

Um also zu zeigen, daß eine bedingte Behauptung $\alpha \mid\!\sim \beta$ **nicht** in $\mathcal{K}^{\mathbf{cum}}$ (bzw. $\mathcal{K}^{\mathbf{pref}}$) liegt, müssen wir nur ein kumulatives (bzw. präferentielles) Modell von $\mathcal{K}$ konstruieren, in dem $\alpha \mid\!\sim \beta$ **nicht** gilt. Hierzu betrachten wir folgendes

Beispiel 4.4.1 (Tweety)
Unser Tweety-Beispiel:

$$\mathcal{K}_1 :=_{\mathbf{def}} \quad \{ \begin{array}{r} \mathbf{pinguin} \mid\!\sim \mathbf{vogel}, \\ \mathbf{vogel} \mid\!\sim \mathbf{fliegt}, \\ \mathbf{pinguin} \mid\!\sim \neg\mathbf{fliegt}, \end{array} \}$$

Wir stellen uns nun folgende Fragen:

- Angenommen, es liegt ein Vogel, der gleichzeitig ein Pinguin ist, vor. Können wir schließen, daß er normalerweise nicht fliegt? Mit anderen Worten

$$\text{Gilt ``}(\mathbf{vogel} \wedge \mathbf{pinguin}) \mid\!\sim \neg\mathbf{fliegt}\text{''} \ \in \ \mathcal{K}_1^{\mathbf{cum}}?$$

- Sind Vögel normalerweise keine Pinguine? Mit anderen Worten

$$\text{Gilt ``}\mathbf{vogel} \mid\!\sim \neg\mathbf{pinguin}\text{''} \in \mathcal{K}_1^{\mathbf{cum}}?$$

- Sind fliegende Tiere normalerweise keine Pinguine? Also

$$\text{Gilt ``}\mathbf{fliegt} \mid\!\sim \neg\mathbf{pinguin}\text{''} \in \mathcal{K}_1^{\mathbf{cum}}?$$

Die Antwort auf die erste Frage ist "*Ja*", wie eine Anwendung der vorsichtigen Monotonie zeigt:

$$\frac{\mathbf{pinguin} \mid\!\sim \mathbf{vogel}, \quad \mathbf{pinguin} \mid\!\sim \neg\mathbf{fliegt}}{\mathbf{pinguin} \wedge \mathbf{vogel} \mid\!\sim \neg\mathbf{fliegt}}.$$

Die Antworten auf die nächsten beiden Fragen sind allerdings "*Nein*". Dies zeigen wir, indem wir geeignete Modelle angeben.

Beispiel 4.4.2 ("vogel $\mid\!\sim$ ¬pinguin" $\notin \mathcal{K}_1^{\mathbf{cum}}$)
Wir definieren ein kumulatives MAK-Modell $\mathcal{S}_1 :=_{\mathbf{def}} (\mathbf{S}_1, \models, \prec, \mathbf{Cn_{AL}})$ (d.h. die Relation $\models\!\equiv$ ist durch die klassische Gültigkeitsrelation $\models$ und **Cons** *ist durch* $\mathbf{Cn_{AL}}$ *ersetzt). Weiterhin ist*

$$\mathbf{S}_1 :=_{\mathbf{def}} \{\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3, \mathbf{s}_4\},$$

wobei

- *in* $\mathbf{s}_0$ *gilt: vogel, pinguin, ¬fliegt,*
- *in* $\mathbf{s}_1$ *gilt: vogel, ¬ pinguin, fliegt,*
- *in* $\mathbf{s}_2$ *gilt: vogel, pinguin, fliegt,*
- *in* $\mathbf{s}_3$ *gilt: vogel, pinguin, ¬ fliegt,*
- *in* $\mathbf{s}_4$ *gilt: vogel, ¬ pinguin, fliegt.*

Für zusammengesetzte Formeln gilt die übliche Definition von $\models$. Nun müssen wir noch die Ordnung erklären:

$$\mathbf{s}_0 \prec \mathbf{s}_1,\ \mathbf{s}_0 \prec \mathbf{s}_2,\ \mathbf{s}_1 \prec \mathbf{s}_2,\ \mathbf{s}_2 \prec \mathbf{s}_3,\ \mathbf{s}_3 \prec \mathbf{s}_4.$$

*Man beachte, daß dies ein kumulatives Modell von $\mathcal{K}_1$ ist ($\prec$ ist <u>nicht</u> transitiv, es handelt sich also um <u>kein</u> präferentielles Modell). Man sieht, daß "***vogel** $\mid\!\sim$ **¬pinguin***" in diesem Modell nicht gilt, denn nicht in jedem minimalen Zustand in dem "***vogel***" gilt, gilt auch "***¬pinguin***" ($\mathbf{s}_0$ ist solch ein minimaler Zustand).*

Beispiel 4.4.3 ("fliegt $\mid\!\sim$ ¬pinguin" $\notin \mathcal{K}_1^{\mathbf{cum}}$)
Wir definieren ein kumulatives MAK-Modell $\mathcal{S}_2 :=_{\mathbf{def}} (\mathbf{S}_2, \models, \prec, \mathbf{Cn_{AL}})$ (d.h. die Relation $\models\!\equiv$ ist durch die klassische Gültigkeitsrelation $\models$ und **Cons** *ist durch* $\mathbf{Cn_{AL}}$ *ersetzt). Weiterhin ist*

$$\mathbf{S}_2 :=_{\mathbf{def}} \{\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2\},$$

wobei

- *in* $\mathbf{s}_0$ *gilt: vogel,* $\neg$ *pinguin, fliegt,*
- *in* $\mathbf{s}_1$ *gilt: vogel, pinguin,* $\neg$*fliegt,*
- *in* $\mathbf{s}_2$ *gilt:* $\neg$*vogel, pinguin, fliegt.*

Für zusammengesetzte Formeln gilt die übliche Definition von $\models$. *Nun müssen wir noch die Ordnung erklären:*

$$\mathbf{s}_0 \prec \mathbf{s}_1,\ \mathbf{s}_1 \prec \mathbf{s}_2.$$

Man beachte, daß dies ein kumulatives Modell von $\mathcal{K}_1$ *ist (wieder ist* $\prec$ *<u>nicht</u> transitiv, es handelt sich also um <u>kein</u> präferentielles Modell). Man sieht sofort, daß "***fliegt** $\mid\!\sim$ $\neg$**pinguin***" in diesem Modell nicht gilt, denn nicht in jedem minimalen Zustand in dem "***fliegt***" gilt, gilt auch "*$\neg$**pinguin***" (*$\mathbf{s}_2$ *ist solch ein minimaler Zustand).*

Das nächste Beispiel zeigt, daß $\neg$**fliegt** $\mid\!\sim$ $\neg$**vogel** noch nicht einmal im präferentiellen Abschluß von $\mathcal{K}_1$ liegt.

Beispiel 4.4.4 ("$\neg$fliegt $\mid\!\sim$ $\neg$vogel" $\not\in$ $\mathcal{K}_1^{\mathbf{pref}}$)
Wir definieren ein präferentielles MAK-Modell $\mathcal{S}_3 :=_{\mathbf{def}} (\mathbf{S}_3, \models, \prec, \mathbf{Cn_{AL}})$ *(d.h. die Relation* $\models$ *ist durch die klassische Gültigkeitsrelation* $\models$ *und* **Cons** *ist durch* $\mathbf{Cn_{AL}}$ *ersetzt). Weiterhin ist*

$$\mathbf{S}_3 :=_{\mathbf{def}} \{\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1\},$$

wobei

- *in* $\mathbf{s}_0$ *gilt: vogel,* $\neg$ *pinguin, fliegt,*
- *in* $\mathbf{s}_1$ *gilt: vogel, pinguin,* $\neg$*fliegt,*

Für zusammengesetzte Formeln gilt die übliche Definition von $\models$. *Nun müssen wir noch die Ordnung erklären:*

$$\mathbf{s}_0 \prec \mathbf{s}_1.$$

Man beachte, daß dies ein präferentielles Modell von $\mathcal{K}_1$ *ist (diesmal ist* $\prec$ *trivialerweise transitiv) Man sieht sofort, daß "*$\neg$**fliegt** $\mid\!\sim$ $\neg$**vogel***" in diesem Modell nicht gilt, denn nicht in jedem minimalen Zustand in dem "*$\neg$**fliegt***" gilt, gilt auch "*$\neg$**vogel***" (*$\mathbf{s}_1$ *ist solch ein minimaler Zustand).*

Als eine weitere Anwendung der Vollständigkeitssätze zeigen wir das folgende

Theorem 4.4.5 (Eigenschaften von $\mathcal{K}^{\mathbf{cum}}$ und $\mathcal{K}^{\mathbf{pref}}$)
Sei $\mathcal{K}$ *eine Wissensbasis und* $\alpha, \beta \in \mathbf{Fml}_{\mathcal{L}}$.

a) $\alpha \mid\!\sim \beta \in \mathcal{K}^{\mathbf{cum}}$ <u>gdw</u> $\alpha \mid\!\sim \Box \in (\mathcal{K} \cup \{\alpha \mid\!\sim \neg\beta\})^{\mathbf{cum}}$.

b) $\alpha \mid\!\sim \beta \in \mathcal{K}^{\mathbf{pref}}$ <u>gdw</u> $\alpha \mid\!\sim \Box \in (\mathcal{K} \cup \{\alpha \mid\!\sim \neg\beta\})^{\mathbf{pref}}$.

Beweis: Da es in den Beweisen für $\mathcal{K}^{\mathbf{cum}}$ und $\mathcal{K}^{\mathbf{pref}}$ fast keinen Unterschied gibt, führen wir nur einen Beweis.

"$\Longrightarrow$:" Sei zunächst $\mathcal{S} = (\mathbf{S}, \models\!\equiv, \prec, \mathbf{Cons})$ ein kumulatives (bzw. präferentielles) MAK-Modell für $\mathcal{K} \cup \{\alpha \mid\!\sim \neg\beta\}$ in dem sich $\models\!\equiv$ klassisch verhält. Da nach Voraussetzung $\alpha \mid\!\sim \beta \in \mathcal{K}^{\mathbf{cum}}$ (bzw. $\alpha \mid\!\sim \beta \in \mathcal{K}^{\mathbf{pref}}$), gilt dies auch in $\mathcal{S}$. Also gelten sowohl $\alpha \mid\!\sim \beta$ als auch $\alpha \mid\!\sim \neg\beta$ in $\mathcal{S}$. D.h. $\forall \mathbf{s} \in \mathbf{S}$ mit $\mathbf{s} \models\!\equiv_{\prec} \alpha$: $\mathbf{s} \models\!\equiv \beta$ und $\mathbf{s} \models\!\equiv \neg\beta$. Also gilt $\mathbf{s} \models\!\equiv \Box$ (da $\models\!\equiv$ sich klassisch verhält). Das aber heißt, daß $\alpha \mid\!\sim \Box$ in $\mathcal{S}$ gilt. Da $\mathcal{S}$ beliebig war, folgt die Behauptung.

"$\Longleftarrow$:" Sei nun $\mathcal{S} = (\mathbf{S}, \models\!\equiv, \prec, \mathbf{Cons})$ ein kumulatives (bzw. präferentielles) MAK-Modell für $\mathcal{K}$ in dem sich $\models\!\equiv$ klassisch verhält. Angenommen, $\alpha \mid\!\sim \beta$ gilt nicht in $\mathcal{S}$, d.h. $\exists \mathbf{s}_0 \in \mathbf{S}$: $\mathbf{s}_0 \models\!\equiv_{\prec} \alpha$ und $\mathbf{s}_0 \not\models\!\equiv \beta$. Dann ist $\mathbf{s}_0 \models\!\equiv \neg\beta$ und $\mathbf{s}_0 \not\models\!\equiv \Box$ (weil $\models\!\equiv$ sich klassisch verhält). Dann würde also $\alpha \mid\!\sim \Box$ nicht in $\mathcal{S}$ gelten, im Widerspruch zur Voraussetzung.

■

4.5 Nicht-Horn Bedingungen: Rationalität

Die Regeln zur Definition des kumulativen und präferentiellen Abschlusses waren allesamt Horn-Regeln. Das folgende Lemma zeigt, daß auch nicht-Horn Regeln interessant sind:

Lemma 4.5.1 (Irrelevanz)
Seien $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ verschiedene aussagenlogische Variable und sei $\mathcal{K} :=_{\mathbf{def}} \{\mathbf{p} \mid\!\sim \mathbf{q}\}$. Dann ist

$$(\mathbf{p} \wedge \mathbf{r}) \mid\!\sim \mathbf{q} \;\notin \mathcal{K}^{\mathbf{pref}}.$$

Dies widerspricht aber unserer Intuition, da $\mathbf{r}$ überhaupt nichts mit $\mathbf{p}$ oder $\mathbf{q}$ zu tun hat.

Beweis: Um zu zeigen, daß $(\mathbf{p} \wedge \mathbf{r}) \mid\!\sim \mathbf{q} \;\notin \mathcal{K}^{\mathbf{pref}}$ definieren wir ein präferentielles MAK-Modell $\mathcal{S}_{\triangle} :=_{\mathbf{def}} (\mathbf{S}_4, \models, \prec, \mathbf{Cons})$ (d.h. die Relation $\models\!\equiv$ ist durch die klassische Gültigkeitsrelation $\models$ ersetzt). Weiterhin sei

$$\mathbf{S}_4 :=_{\mathbf{def}} \{\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1\},$$

wobei

- in $\mathbf{s}_0$ gilt: $\mathbf{p}$, $\neg\mathbf{r}$, $\mathbf{q}$,
- in $\mathbf{s}_1$ gilt: $\mathbf{p}$, $\mathbf{r}$, $\neg\mathbf{q}$.

Für zusammengesetzte Formeln gilt die übliche Definition von $\models$. Die Ordnung $\prec$ ist wie folgt definiert: $\mathbf{s}_0 \prec \mathbf{s}_1$. Man beachte, daß dies ein präferentielles Modell von $\mathcal{K}$ ist. Man sieht sofort, daß "$(\mathbf{p} \wedge \mathbf{r}) \mid\!\sim \mathbf{q}$" in diesem Modell nicht gilt, denn nicht in jedem minimalen Zustand in dem "$(\mathbf{p} \wedge \mathbf{r})$" gilt, gilt auch "q" ($\mathbf{s}_1$ ist solch ein minimaler Zustand).

■

Solch ein Verhalten kann ausgeschlossen werden, wenn wir etwa die folgende Regel voraussetzen:

$$\frac{\alpha \not\mid\!\sim \neg\beta, \quad \alpha \mid\!\sim \gamma}{\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma} \qquad (\textit{Rationalität})$$

Man beachte, daß diese Regel eine Verstärkung der vorsichtigen Monotonie ist: $\alpha \mid\!\sim \beta$ wurde gerade durch $\alpha \not\mid\!\sim \neg\beta$ ersetzt.

Weitere Varianten der Rationalität sind

$$\frac{\alpha \not\mid\!\sim \gamma, \quad \beta \not\mid\!\sim \gamma}{\alpha \vee \beta \mid\!\sim \gamma} \qquad (\textit{Disjunktive Rationalität})$$

und

$$\frac{(\alpha \wedge \gamma) \not\mid\!\sim \beta, \quad (\alpha \wedge \neg\gamma) \not\mid\!\sim \beta}{\alpha \not\mid\!\sim \beta} \qquad (\textit{Negations-Rationalität}).$$

Es gilt folgendes leicht zu verifizierendes Lemma:

Lemma 4.5.2 (Varianten der Rationalität)
Bezüglich des Systems $\mathcal{C}$ gilt:

$$\textit{Rationalität} \implies \textit{Disjunktive Rationalität} \implies \textit{Negations-Rationalität}\ .$$

Offensichtlich ist es nicht möglich, analog zu $\mathcal{K}^{\mathbf{cum}}$ oder $\mathcal{K}^{\mathbf{pref}}$ in kanonischer Weise so etwas wie einen rationalen Abschluß zu definieren. Zwar können wir die Rationalität anwenden, aber es kann ja passieren, daß wir bedingte Behauptungen hinzunehmen müssen, die vorherige Anwendungen der Rationalitäts-regel wieder zunichte machen. Wir haben hier eben kein monotones Anwachsen der bedingten Behauptungen. Im nächsten Kapitel werden wir die Idee von Lehmann und Magidor zur Definition eines rationalen Abschlusses vorstellen.

4.6 Abstrakte Eigenschaften von NML-Systemen

Einige der im System $\mathcal{C}$ benutzten Regeln sind unkritisch, da sie von jedem nichtmonotonen System erfüllt werden. In der Tat fällt es schwer, sich Situationen vorzustellen, in denen die folgenden Eigenschaften nicht gelten:

- *Reflexivität*,
- *Left Logical Equivalence*,
- *Right Weakening*,
- *Cut*.

Interessant sind daher die *Kumulativität*, bzw. die *Oder*-Regel.

Im nächsten Abschnitt 4.6.1 bestimmen wir die Eigenschaften von CWA und CIRC. Die Eigenschaften von verschiedenen Teilen der Default Logik untersuchen wir in Abschnitt 4.6.2.

4.6.1 CWA und CIRC

Theorem 4.6.1 (Eigenschaften von CWA)
a) *CWA erfüllt* Reflexivität, Left Log. Equiv., Right Weak. *und* Cut.
b) *Ist* $\mathbf{CWA}(\Phi)$ *konsistent, so gilt:*

$$\Phi \subseteq \Psi \subseteq \mathbf{CWA}(\Phi) \implies \mathbf{CWA}(\Phi) \subseteq \mathbf{CWA}(\Psi).$$

Dies ist gerade die vorsichtige Monotonie*, also gelten alle Regeln aus* $\mathcal{C}$*, wenn CWA konsistent ist.*

Der Beweis des letzten Theorems ist sehr einfach und daher wiederum dem Leser überlassen.

Lemma 4.6.2 (Eigenschaften minimaler Modelle)
Gilt $\emptyset \neq \mathbf{MinMOD}(\Sigma \cup \{\alpha\}) \models \beta$ *so gilt auch*

$$\mathbf{MinMOD}(\Sigma \cup \{\alpha\}) = \mathbf{MinMOD}(\Sigma \cup \{\alpha, \beta\})$$

Die Voraussetzung der Widerspruchsfreiheit in obigem Lemma ist sehr wichtig. Wir haben bereits in Beispiel 3.5.1 von Kapitel 3 gesehen, daß minimale Modelle nicht immer existieren müssen. Erweitern wir im dortigen Beispiel die Theorie Σ um den Satz $\beta :=_{\mathbf{def}} \mathbf{P}(\mathbf{c}) \rightarrow \forall \mathbf{x} \mathbf{P}(\mathbf{x})$, so haben wir ein Gegenbeispiel zu Lemma 4.6.2, wenn wir die Voraussaetzung der Konsistenz ($\emptyset \neq \mathbf{MinMOD}(\Sigma \cup \{\alpha\})$) fallen lassen.

Theorem 4.6.3 (CIRC erfüllt $\mathcal{P}$, falls konsistent)
a) *CIRC erfüllt* Reflexivität, Left Log. Equiv., Right Weak., Cut *und* Oder.
b) *Ist* $\mathbf{CIRC}(\Phi)$ *konsistent, so gilt:*

$$\Phi \subseteq \Psi \subseteq \mathbf{CIRC}(\Phi) \implies \mathbf{CIRC}(\Phi) \subseteq \mathbf{CIRC}(\Psi).$$

Dies ist gerade die vorsichtige Monotonie*, also gelten alle Regeln aus* $\mathcal{P}$*, wenn CIRC konsistent ist.*

Beweis: Für **a)** genügt es, die Oder-Regel zu zeigen. Ist $\mathcal{A} \in \mathbf{MinMOD}(\Sigma \cup \{\alpha \vee \beta\})$, so gilt $\mathcal{A} \models \alpha$ oder $\mathcal{A} \models \beta$. In beiden Fällen folgt nach Voraussetzung der Oder-Regel: $\mathcal{A} \models \gamma$.
b) folgt sofort aus dem vorigen Lemma. ∎

4.6.2 Teilsysteme von DL

Die der Default-Logik zugeordnete skeptische Konsequenzrelation $\mid\!\sim$ erfüllt alle Regeln aus $\mathcal{C}$ bis auf die wichtigste — die vorsichtige Monotonie. Das nachstehende Beispiel stammt von Makinson ([Mak89]):

$$\mathcal{D} :=_{\mathbf{def}} \{\frac{\alpha \vee \beta : \neg\alpha}{\neg\alpha}, \frac{\emptyset : \alpha}{\alpha}\}.$$

Die Theorie $(\emptyset, \mathcal{D})$ hat eine einzige Extension $\mathbf{Cn}(\{\alpha\})$, d.h. $\emptyset \mid\!\sim (\alpha \vee \beta)$, aber die Theorie $(\{\alpha \vee \beta\}, \mathcal{D})$ besitzt eine weitere Extension $\mathbf{E}' = \mathbf{Cn}(\{\neg\alpha, \beta\})$, so daß aus $(\{\alpha \vee \beta\}, \mathcal{D})$ nicht α folgt.

Es scheint, daß für jede vernünftige Semantik (kumulativ oder nicht)

- α nicht von $(\{\alpha \vee \beta\}, \mathcal{D})$ ableitbar sein sollte und
- falls ϕ aus $(\mathbf{W}, \mathcal{D})$ folgt und $\phi \models \psi$, dann sollte ψ aus $(\mathbf{W}, \mathcal{D})$ folgen.

Makinsons Gegenbeispiel zeigt also, daß keine *kumulative* Semantik, die die beiden obigen Bedingungen erfüllt, α aus $(\emptyset, \mathcal{D})$ ableitet: Kumulative Semantiken sind daher in einem gewissen Sinne *skeptischer* als nicht-kumulative Semantiken.

Um die Kumulativität für p-freie Default-Theorien vom Poole-Typ zu beweisen, benötigen wir das folgende:

Lemma 4.6.4
Sei (W,$\mathcal{D}$) p-frei vom Poole-Typ und (W,$\mathcal{D}$) $\mid\!\sim \beta$.
Die Extensionen von (W,$\mathcal{D}$) und von $(\mathbf{W} \cup \{\beta\}, \mathcal{D})$ stimmen überein.

Beweis: Nach Definition von Γ und (W,$\mathcal{D}$) $\mid\!\sim \beta$ ist jede Extension von (W,$\mathcal{D}$) auch eine Extension von $(\mathbf{W} \cup \{\beta\}, \mathcal{D})$.

Sei $\mathbf{E}$ eine Extension von $(\mathbf{W} \cup \{\beta\}, \mathcal{D})$. Nach Lemma 2.5.5 ist $\mathbf{E}$ von der Form

$$\mathbf{E} = \mathbf{Cn}(\mathbf{W} \cup \{\beta\} \cup \mathbf{Concl}(\mathcal{D}')).$$

Falls $\mathbf{E}$ keine Extension von (W,$\mathcal{D}$) ist, dann gibt es (wegen Korollar 2.5.6) eine Extension $\mathbf{E_x}$ von (W,$\mathcal{D}$) der Form:

$$\mathbf{E_x} = \mathbf{Cn}(\mathbf{W} \cup \mathbf{Concl}(\mathcal{D}_\mathbf{x})), \text{ wobei } \mathcal{D}_\mathbf{x} \supset \mathcal{D}'.$$

Da $(\mathbf{W}, \mathcal{D}) \mid\!\sim \beta$, haben wir $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{E_x}$, und $\mathbf{E_x}$ ist eine Extension von $(\mathbf{W} \cup \{\beta\}, \mathcal{D})$. Also

$$\mathbf{E} = \mathbf{E_x},$$

denn $\mathbf{E} \subset \mathbf{E_x}$ würde der Maximalitäts-Bedingung in Korollar 2.5.6 widersprechen.

■

Aus dem letzten Lemma folgt natürlich sofort die Kumulativität. Wir zeigen nun, daß wir dieses letzte Resultat nicht auf die größere Klasse der p-freien seminormalen Default-Theorien ausdehnen können.

Beispiel 4.6.5 (Seminormale, p-freie DL ist nicht vorsichtig monoton)
Sei $\mathbf{W}_1 :=_{\mathbf{def}} \{\beta \to \neg\mathbf{x}\}$ *und*

$$\mathcal{D}_1 :=_{\mathbf{def}} \{\frac{\emptyset : \alpha \wedge \beta}{\alpha \wedge \beta}, \frac{\emptyset : \neg\alpha}{\neg\alpha}\}, \quad \mathcal{D}_2 :=_{\mathbf{def}} \{\frac{\emptyset : \mathbf{x}}{\neg\mathbf{x}}\}.$$

Die Defaults in $\mathcal{D}_1$ sind seminormal, der Default in $\mathcal{D}_2$ ist es nicht: Alle Defaults sind aber p-frei.
Die Default-Theorie $(\mathbf{W}_1, \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2)$ hat genau eine Extension $\mathbf{E}_1 :=_{\mathbf{def}} \mathbf{Cn}(\{\alpha, \beta, \neg\mathbf{x}\})$, so daß

$$(\mathbf{W}_1, \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2) \mid\!\sim \alpha, \beta.$$

Aber $(\mathbf{W}_1 \cup \{\beta\}, \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2)$ hat eine zweite Extension $\mathbf{E}_2 :=_{\mathbf{def}} \mathbf{Cn}(\{\neg\alpha, \beta, \neg\mathbf{x}\})$, so daß

$$(\mathbf{W}_1 \cup \{\beta\}, \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2) \not\mid\!\sim \alpha.$$

Anstatt $\mathcal{D}_2$ *können wir auch die seminormalen Defaults*

$$\mathcal{D}_2{}' :=_{\mathbf{def}} \{ \frac{\emptyset : \mathbf{x} \wedge \neg \mathbf{y}}{\mathbf{x}}, \frac{\emptyset : \mathbf{y} \wedge \neg \mathbf{z}}{\mathbf{y}}, \frac{\emptyset : \mathbf{z} \wedge \neg \mathbf{x}}{\mathbf{z}} \}$$

benutzen (siehe Beispiel 2.6.1 aus Kapitel 2).

Wie oben besitzt die Theorie $(\mathbf{W}_1, \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2{}')$ *genau* $\mathbf{Cn}(\{\alpha, \beta, \neg\mathbf{x}, \mathbf{z}\})$ *als einzige Extension* $\mathbf{E}_1$*, so daß*

$$(\mathbf{W}_1, \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2{}') \mid\!\sim \alpha, \beta.$$

Aber $(\mathbf{W}_1 \cup \{\beta\}, \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2{}')$ *besitzt eine zweite Extension* $\mathbf{E}_2 :=_{\mathbf{def}} \mathbf{Cn}(\{\neg\alpha, \beta, \neg\mathbf{x}, \mathbf{z}\})$*, so daß*

$$\textit{nicht } (\mathbf{W}_1 \cup \{\beta\}, \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2{}') \mid\!\sim \alpha.$$

Dieses letzte Beispiel zeigt also, daß seminormale, p-freie Default-Theorien nicht kumulativ sind.

Unser nächstes Beispiel zeigt, daß nicht einmal die eingeschränkteste Klasse von Defaults, nämlich die p-freien, normalen Defaults, die schwächste Rationalitätsbedingung erfüllen:

Beispiel 4.6.6 (Normale p-freie Defaults sind nicht negations-rational)
Sei $\mathbf{W} :=_{\mathbf{def}} \{ (\gamma \wedge \mathbf{x}_1) \to \neg\beta, (\neg\gamma \wedge \mathbf{x}_2) \to \neg\beta\}$ *und*

$$\mathcal{D} :=_{\mathbf{def}} \{ \frac{\emptyset : \mathbf{x}_1 \wedge \neg \mathbf{x}_2}{\mathbf{x}_1 \wedge \neg \mathbf{x}_2}, \frac{\emptyset : \mathbf{x}_2 \wedge \neg \mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_2 \wedge \neg \mathbf{x}_1}, \frac{\emptyset : \beta}{\beta} \}$$

$(\mathbf{W}, \mathcal{D})$ *besitzt 2 Extensionen:* $\mathbf{Cn}(\{\mathbf{x}_1, \neg\mathbf{x}_2, \beta, \neg\gamma\})$ *und* $\mathbf{Cn}(\{\mathbf{x}_2, \neg\mathbf{x}_1, \beta, \gamma\})$*, so daß*

$$(\mathbf{W}, \mathcal{D}) \mid\!\sim \beta.$$

Aber $\mathbf{Cn}(\{\gamma, \mathbf{x}_1, \neg\mathbf{x}_2, \neg\beta\})$ *ist eine Extension von* $(\mathbf{W} \cup \{\gamma\}, \mathcal{D})$ *(also "nicht* $(\mathbf{W} \cup \{\gamma\}, \mathcal{D}) \mid\!\sim \beta$*") und* $\mathbf{Cn}(\{\neg\gamma, \mathbf{x}_2, \neg\mathbf{x}_1, \neg\beta\})$ *ist eine Extension von* $(\mathbf{W} \cup \{\neg\gamma\}, \mathcal{D})$ *(also "nicht* $(\mathbf{W} \cup \{\neg\gamma\}, \mathcal{D}) \mid\!\sim \beta$*").*

Das nächste Theorem faßt alle Eigenschaften von p-freien Default-Theorien zusammen:

Theorem 4.6.7 (Abstrakte Eigenschaften von p-freier DL)

a) *Für jede p-freien Default-Theorie vom Poole-Typ ist* $SEM_{\mathbf{DL}}$ *präferentiell.*

b) *Es gibt eine seminormale, p-freie Default-Theorie, für die* $SEM_{\mathbf{DL}}$ *nicht kumulativ ist.*

c) *Es gibt eine normale, p-freie Default-Theorie, für die* $SEM_{\mathbf{DL}}$ *nicht negations-rational ist.*

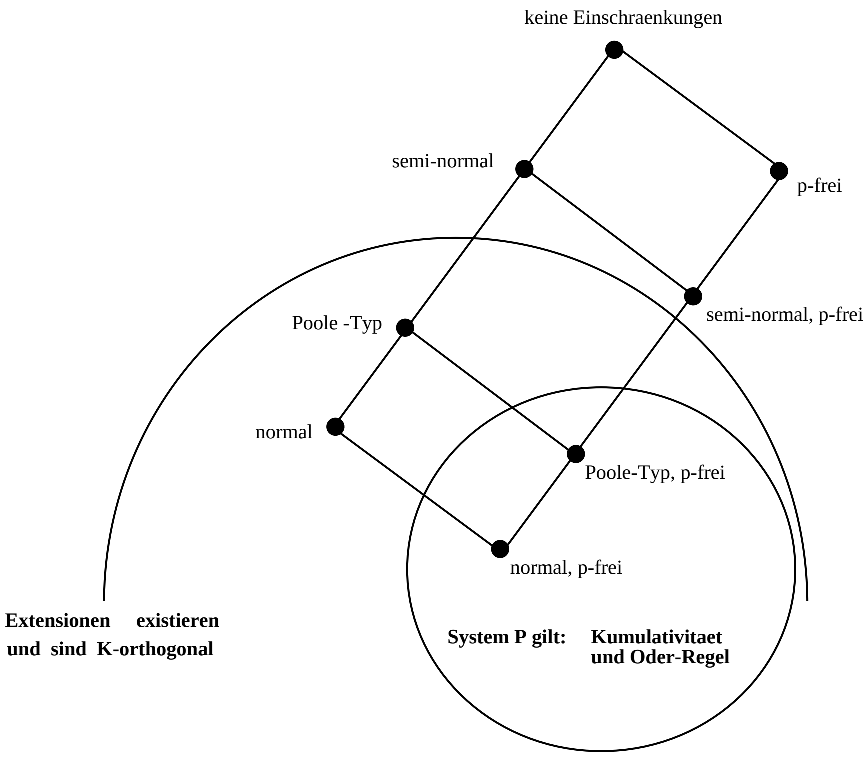

Abbildung 4.1: Kumulativität in Teilsystemen von DL

Beweis: Es bleibt noch die *Oder*-Regel zu beweisen. Sei $(\mathbf{W} \cup \{\alpha\}, \mathcal{D}) \mathrel{|\!\sim} \gamma$, $(\mathbf{W} \cup \{\beta\}, \mathcal{D}) \mathrel{|\!\sim} \gamma$ und $\mathbf{E}_{\mathcal{D}'}$ eine Extension von $(\mathbf{W} \cup \{\alpha \vee \beta\}, \mathcal{D}) \mathrel{|\!\sim} \gamma$, die durch $\mathcal{D}' \subseteq \mathcal{D}$ bestimmt ist (wie in Korollar 2.5.6 beschrieben). Wegen $\mathbf{E}_{\mathcal{D}'} \models (\alpha \vee \beta)$ haben wir

$$\mathbf{E}_{\mathcal{D}'} \cup \{\alpha\} \text{ ist konsistent oder } \mathbf{E}_{\mathcal{D}'} \cup \{\beta\} \text{ ist konsistent.}$$

Es folgt (mit Korollar 2.5.6), daß $\mathbf{Cn}(\mathbf{E}_{\mathcal{D}'} \cup \{\alpha\})=\mathrm{Cn}(\mathbf{W} \cup \{\alpha\} \cup \mathbf{Concl}(\mathcal{D}'))$ eine Extension von $(\mathbf{W} \cup \{\alpha\}, \mathcal{D})$ oder $\mathrm{Cn}(\mathbf{E}_{\mathcal{D}'} \cup \{\beta\})=\mathrm{Cn}(\mathbf{W} \cup \{\beta\} \cup \mathbf{Concl}(\mathcal{D}'))$ eine Extension von $(\mathbf{W} \cup \{\beta\}, \mathcal{D})$ ist. In beiden Fällen gilt γ, so daß $\mathbf{E}_{\mathcal{D}'} \models (\alpha \rightarrow \gamma)$ und $\mathbf{E}_{\mathcal{D}'} \models (\beta \rightarrow \gamma)$ (mit dem Deduktionstheorem). Aus beiden Aussagen zusammen folgt (man beachte $\mathbf{E}_{\mathcal{D}'} \models (\alpha \vee \beta)$)

$$\mathbf{E}_{\mathcal{D}'} \models \gamma$$

und wir sind fertig. ■

Kapitel 5

Der rationale Abschluß $\mathcal{K}^{\mathbf{rat}}$

Eine Einigung darüber, welche Eigenschaften für eine nichtmonotone Konsequenzrelation wünschenswert sind, ist bisher nicht in Sicht. Aber die weitergehende Frage, ob es überhaupt eine formalisierbare nichtmonotone Logik gibt, ist die entscheidende Frage in diesem Gebiet. Sollte sie im Laufe der Zeit negativ beantwortet werden, dann bleibt die Beschäftigung mit der Nichtmonotonie im phänomenologischen, spekulativen Bereich stecken. Wir glauben allerdings, daß zumindest in abgegrenzten Bereichen eine formalisierte nichtmonotone Logik im Entstehen ist. Der Prozeß der Herausbildung allgemeiner Postulate für nichtmonotone Logiken kann keine Einbahnstraße von konkreten Beispielen zu formalen Eigenschaften sein. Wir wollen daher in diesem Kapitel nicht nur einen weiteren Ansatz von Lehmann und Magidor darstellen, sondern ihn (zusammen mit $\mathcal{K}^{\mathbf{cum}}$ und $\mathcal{K}^{\mathbf{pref}}$) wieder mit einigen konkreten Beispielen konfrontieren.

In Abschnitt 4.5 des letzten Kapitels haben wir eine interessante Verstärkung der vorsichtigen Monotonie, nämlich die *Rationalität* betrachtet Der in diesem Kapitel beschriebene rationale Abschluß $\mathcal{K}^{\mathbf{rat}}$ unterscheidet sich beträchtlich von $\mathcal{K}^{\mathbf{cum}}$ und $\mathcal{K}^{\mathbf{pref}}$:

$\underline{\mathcal{K} \rightsquigarrow \mathcal{K}^{\mathbf{cum}}}$**:** Dieser Übergang, wie auch $\mathcal{K} \rightsquigarrow \mathcal{K}^{\mathbf{pref}}$ ist *monoton*, d.h.

$$\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}' \implies \mathcal{K}^{\mathbf{cum}} \subseteq (\mathcal{K}')^{\mathbf{cum}}.$$

Der Grund dafür ist, daß beide Abschlüsse mittels geeigneter *Inferenzregeln* der Form

"Falls $\mathbf{a} \mid\!\sim \mathbf{b}$ und $\mathbf{c} \mid\!\sim \mathbf{d}$ so $\mathbf{e} \mid\!\sim \mathbf{f}$"

definiert werden: $\mathcal{K}^{\mathbf{cum}}$ und $\mathcal{K}^{\mathbf{pref}}$ sind jeweils die Abschlüsse von $\mathcal{K}$ unter geeigneten Mengen von Inferenzregeln der obigen Form.

$\underline{\mathcal{K} \rightsquigarrow \mathcal{K}^{\mathbf{rat}}}$**:** Dieser Übergang ist *nichtmonoton* und kann nicht so einfach beschrieben werden. Allerdings geben Lehmann und Magidor (in [LM92]) einen sehr effektiven und intuitiv nachvollziehbaren Algorithmus zur Berechnung von $\mathcal{K}^{\mathbf{rat}}$ an, auf dessen Beschreibung wir uns im folgenden konzentrieren wollen.

Wir haben in Abschnitt 4.5 des letzten Kapitels schon erwähnt, daß es nicht offensichtlich ist, einen Abschluß von $\mathcal{K}$ zu konstruieren, der die Eigenschaft der *Rationalität* erfüllt. Der Grund liegt darin, daß dieser Übergang eben nicht monoton (wie beim kumulativen oder präferentiellen Abschluß) ist. Natürlich kann man sich trotzdem fragen, ob zu einer gegebenen Wissensbasis $\mathcal{K}$ überhaupt eine rationale Erweiterung $\hat{\mathcal{K}}$, die $\mathcal{K}$ enthält, existiert. Dann bleibt aber noch das Problem zu entscheiden, welche von diesen rationalen Abschlüssen man nehmen soll. Die eleganteste Möglichkeit wäre es natürlich, den Schnitt all dieser rationalen Abschlüsse zu betrachten. Leider gilt folgendes

Lemma 5.0.8 (Schnitt über alle rationalen Abschlüsse)
Zwar existiert zu jeder endlichen Wissensbasis $\mathcal{K}$ mindestens eine rationale Erweiterung $\hat{\mathcal{K}}$, aber der Schnitt über all diese Abschlüsse stimmt mit $\mathcal{K}^{\mathbf{pref}}$ überein:

$$\mathcal{K}^{\mathbf{pref}} = \bigcap_{\hat{\mathcal{K}} \textit{ ist rat. Erw. von } \mathcal{K}} \hat{\mathcal{K}}.$$

So einfach geht es also leider nicht! Trotzdem werden wir im folgenden zeigen, wie man einen eindeutig bestimmten rationalen Abschluß $\mathcal{K}^{\mathbf{rat}}$ von $\mathcal{K}$ konstruieren und auch effizient berechnen kann. Dieses Kapitel stellt die Ergebnisse von [LM92, DS93, DS95] dar.

Im nächsten Abschnitt 5.1 stellen wir einige der schon in den vorhergehenden Kapiteln behandelten Beispiele und deren Formalisierung im Rahmen unserer Wissensbasis von bedingten Behauptungen vor. Anhand dieser Beispiele werden wir im Rest dieses $\mathcal{K}^{\mathbf{pref}}$ und $\mathcal{K}^{\mathbf{rat}}$ illustrieren. Weitere Beispiele werden dann in Abschnitt 5.4.2 vorgestellt.

In Abschnitt 5.2 stellen wir den rationalen Abschluß $\mathcal{K}^{\mathbf{rat}}$ vor und zeigen, wie er mit Hilfe eines aussagenlogischen Beweisers sehr einfach implementiert werden kann. Wir zeigen außerdem, wie man $\mathcal{K}^{\mathbf{pref}}$ sehr elegant auf $\mathcal{K}^{\mathbf{rat}}$ zurückführen können.

In Abschnitt 5.3 behandeln wir einen weiteren wichtigen Punkt, nämlich *Wie unterscheidet man zwischen* sicherem *und* Default- *Wissen?* In Kraus, Lehmann und Magidors kumulativem und präferentiellem Abschluß war eine solche Möglichkeit ja vorgesehen (die Menge $\mathcal{U}$, siehe Abschnitt 4.1.1). In der Nachfolgearbeit [LM92] wurde allerdings darauf verzichtet.

Schließlich werden wir in Abschnitt 5.4 $\mathcal{K}^{\mathbf{pref}}$ und $\mathcal{K}^{\mathbf{rat}}$ systematisch anhand einer Menge von neuen Beispielen vergleichen.

5.1 Einige Beispiele und deren Formalisierung

Wir betrachten zur Illustration einige Beispiele und ihre aussagenlogische Formalisierung in bedingten Behauptungen.

Beispiel 5.1.1 (Mehrfache Ausnahmen)
Wir erinnern zunächst an unser Tweety-Beispiel:

$$\mathcal{K}_1 :=_{\mathbf{def}} \{ \begin{array}{r} \mathbf{pinguin} \mathrel{|\!\sim} \mathbf{vogel}, \\ \mathbf{vogel} \mathrel{|\!\sim} \mathbf{fliegt}, \\ \mathbf{pinguin} \mathrel{|\!\sim} \neg\mathbf{fliegt}, \end{array} \}$$

Eine etwas erweiterte Version dieses Beispiels ist die folgende. Tiere fliegen normalerweise nicht. Vögel aber sind Ausnahmen in der Klasse aller Tiere, da sie fliegen können, während Pinguine eine Ausnahme in der Klasse aller Vögel darstellen, da sie nicht fliegen können. Wir erwarten intuitiv, daß sowohl $\mathbf{tier} \mathrel{|\!\sim} \neg\mathbf{vogel}$, $\mathbf{tier} \wedge \neg\mathbf{vogel} \mathrel{|\!\sim} \neg\mathbf{fliegt}$, $\mathbf{tier} \wedge \mathbf{vogel} \mathrel{|\!\sim} \mathbf{fliegt}$, *als auch* $\mathbf{vogel} \wedge \mathbf{pinguin} \mathrel{|\!\sim} \neg\mathbf{fliegt}$, *herleitbar sind.*

$$\mathcal{K}_2 :=_{\mathbf{def}} \{ \begin{array}{r} \mathbf{tier} \mathrel{|\!\sim} \neg\mathbf{fliegt}, \\ \mathbf{vogel} \mathrel{|\!\sim} \mathbf{tier}, \\ \mathbf{vogel} \mathrel{|\!\sim} \mathbf{fliegt}, \\ \mathbf{pinguin} \mathrel{|\!\sim} \mathbf{vogel}, \\ \mathbf{pinguin} \mathrel{|\!\sim} \neg\mathbf{fliegt} \end{array} \}$$

Beispiel 5.1.2 (Nixon-Diamant)

$$\mathcal{K}_3 :=_{\mathbf{def}} \{ \begin{array}{r} \mathbf{quaker} \mathrel{|\!\sim} \mathbf{pacifist}, \\ \mathbf{republikaner} \mathrel{|\!\sim} \neg\mathbf{pacifist} \end{array} \}$$

Wir erwarten positive Antworten für

$(\mathbf{quaker} \wedge \neg\mathbf{republikaner}) \mathrel{|\!\sim} \mathbf{pacifist}$, *und* $(\neg\mathbf{quaker} \wedge \mathbf{republikaner}) \mathrel{|\!\sim} \neg\mathbf{pacifist}$,

aber negative für

$(\mathbf{quaker} \wedge \mathbf{republikaner}) \mathrel{|\!\sim} \mathbf{pacifist}$ *und* $(\mathbf{quaker} \wedge \mathbf{republikaner}) \mathrel{|\!\sim} \neg\mathbf{pacifist}$.

5.2 Definition von $\mathcal{K}^{\mathbf{rat}}$

Wie kommt man auf die logischen Schlußregeln für den kumulativen und präferentiellen Abschlußoperator ? In erster Linie wird man sich dabei auf seine Intuition verlassen — man wird versuchen durch Introspektion zu ergründen, welche logischen Schlüsse im Alltag eine Rolle spielen und man wird auch die Analogie zur klassischen Logik nicht aus den Augen verlieren. Trotz des vagen Charakters dieses Instrumentariums läßt sich damit schon eine Menge erreichen. Es gibt jedoch noch einen weiteren Weg logische Schlußregeln zu finden oder vorgeschlagene Regeln zu rechtfertigen, nämlich durch eine modelltheoretische Semantik. Wir wollen, als ein Beispiel dazu, die präferentiellen Modelle aus Abschnitt 4.2 des letzten Kapitels motivieren. Ein präferentielles Modell $\mathcal{S}$ besteht zunächst aus einer Menge $\mathbf{S}$ von Zuständen und einer strikten partiellen Ordnung $\prec$ auf $\mathbf{S}$. Die Relation $\mathbf{m}_1 \prec \mathbf{m}_2$ für Zustände $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2 \in \mathbf{S}$ soll bedeuten, daß $\mathbf{m}_1$ der wichtigere Zustand ist. Normalerweise befinden wir uns in einem Zustand $\mathbf{m}_1$, während $\mathbf{m}_2$ die Ausnahme ist. Im Szenarium von Beispiel 4.4.1 könnten wir folgende Zustände $\mathbf{m}_1$, $\mathbf{m}_2$ und $\mathbf{m}_3$ betrachten (Zustände werden durch die in ihnen gültigen Aussagen dargestellt):

$\mathbf{m}_1$:	"**tier**"	$\mathbf{m}_2$:	"**tier**"	$\mathbf{m}_3$:	"**tier**"
	"$\neg$**fliegt**"		"**fliegt**"		"$\neg$**fliegt**"
	"$\neg$**vogel**"		"**vogel**"		"**vogel**"
	"$\neg$**pinguin**"		"$\neg$**pinguin**"		"**pinguin**"

In der üblichen Formulierung von Beispielen dieser Art wird vorausgesetzt, daß ein Objekt **t** gegeben ist, dessen Eigenschaften aufgeschrieben oder erschlossen werden sollen. In der Beschreibung selbst taucht **t** nicht auf.

Es sollte $\mathbf{m}_1 \prec \mathbf{m}_2$ gelten, da in dem gewählten Szenarium fliegende Tiere die Ausnahme sind, und es sollte auch $\mathbf{m}_2 \prec \mathbf{m}_3$ gelten, da nichtfliegende Vögel die Ausnahme sind. $\mathcal{S} = \langle\ \{\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3\}\ , \models, \prec, \mathbf{Cn_{AL}}\ \rangle$ ist ein Beispiel für ein präferentielles Modell. Man sieht, daß alle bedingten Behauptungen des Beispiels 4.4.1 in diesem präferentiellen Modell wahr sind.

Trotzdem besteht $\mathcal{K}_2^{\mathbf{pref}}$ nicht genau aus den bedingten Behauptungen, die in $\mathcal{S}$ gelten. So gilt zwar in obigem Modell die Aussage **fliegt** $\mid\!\sim$ **tier**, aber diese Aussage ist nicht im präferentiellen Abschluß von $\mathcal{K}_2$ enthalten. Dies sieht man, wenn ein weiterer Zustand $\mathbf{m}_{1.5}$ zwischen $\mathbf{m}_1$ und $\mathbf{m}_2$ eingefügt wird:

$\mathbf{m}_1$:	"**tier**"	$\mathbf{m}_{1.5}$:	"$\neg$**tier**"	$\mathbf{m}_2$:	"**tier**"	$\mathbf{m}_3$:	"**tier**"
	"$\neg$**fliegt**"		"**fliegt**"		"**fliegt**"		"$\neg$**fliegt**"
	"$\neg$**vogel**"		"$\neg$**vogel**"		"**vogel**"		"**vogel**"
	"$\neg$**pinguin**"		"$\neg$**pinguin**"		"$\neg$**pinguin**"		"**pinguin**"

Man beachte, daß dieses Modell ein präferentielles Modell von $\mathcal{K}_2$ ist, in dem die Aussage **fliegt** $\mid\!\sim$ **tier** <u>nicht</u> gilt, weil $\mathbf{m}_{1.5}$ ein für **fliegt** minimaler Zustand ist, in dem $\neg$**tier** gilt.

Zur Definition des Algorithmus zur Berechnung von $\mathcal{K}^{\mathbf{rat}}$ sind folgende beiden Punkte wichtig:

1. der Begriff einer *Ausnahmeformel*,
2. der Begriff des *Ranges* einer Formel.

Definition 5.2.1 (Ausnahmeformeln)
Eine Formel α heißt eine Ausnahmeformel *für $\mathcal{K}$, wenn* $\top \mid\!\sim \neg\alpha \in \mathcal{K}^{\mathbf{pref}}$.
Die bedingte Behauptung $\alpha \mid\!\sim \beta$ heißt eine Ausnahmebehauptung *für $\mathcal{K}$, wenn α eine Ausnahmeformel für $\mathcal{K}$ ist.*

Daß α eine Ausnahmeformel für $\mathcal{K}$ ist, bedeutet also, daß normalerweise $\neg\alpha$ gilt (bezüglich $\mathcal{K}$). Die Menge aller bedingten Behauptungen aus $\mathcal{K}$, die Ausnahmebehauptungen für $\mathcal{K}$ sind, werden mit *Ausnahme($\mathcal{K}$)* bezeichnet. Es läßt sich nun eine

Folge $\mathbf{C}_0, \mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots$ bilden mit

$$\mathbf{C}_0 :=_{\mathbf{def}} \mathcal{K},\ \ \mathbf{C_{i+1}} :=_{\mathbf{def}} \mathbf{Ausnahme}(\mathbf{C_i}).$$

Es gilt: $\mathbf{C_{i+1}} \subseteq \mathbf{C_i}$ und es gibt einen Index $\mathbf{n}$ mit

$$\mathbf{C}_1 \supset \mathbf{C}_2 \supset \ldots \supset \mathbf{C_{n-1}} \supset \mathbf{C_n} = \mathbf{C_{n+1}} = \ldots .$$

Der Nachweis der Ausnahmeeigenschaft für eine Formel α erscheint zunächst schwierig, da hierzu der präferentielle Abschluß benutzt wird. Das nachfolgende Theorem liefert jedoch eine einfache und nützliche Berechnung.

Definition 5.2.2 ($\widetilde{\mathcal{K}}$)
Sei $\widetilde{\mathcal{K}}$ die Menge, in der alle Vorkommen von $\mid\!\sim$ in $\mathcal{K}$ durch die materiale Implikation $\rightarrow$ ersetzt sind. $\widetilde{\mathcal{K}}$ ist also eine Menge aussagenlogischer Formeln.

Das folgende Theorem stellt eine Zusammenhang zwischen der Ableitbarkeit einer Formel α aus $\widetilde{\mathcal{K}}$ und der Ableitbarkeit von $\top \mid\!\sim \alpha$ aus $\mathcal{K}^{\mathbf{pref}}$ dar:

Theorem 5.2.3 (Zusammenhang zwischen $\widetilde{\mathcal{K}}$ und $\mathcal{K}^{\mathbf{pref}}$)
Seien eine Wissensbasis $\mathcal{K}$ und $\alpha \in \mathbf{Fml}_{\mathcal{L}}$ gegeben. Es gilt:

$$\widetilde{\mathcal{K}} \models \alpha \quad \underline{\text{gdw}} \quad \top \mid\!\sim \alpha \ \in \mathcal{K}^{\mathbf{pref}}.$$

Beweis: Sei zunächst $\top \mid\!\sim \alpha \ \in \mathcal{K}^{\mathbf{pref}}$. Angenommen, $\widetilde{\mathcal{K}} \not\models \alpha$. Dann gibt es ein Modell $\mathcal{A}$ von $\widetilde{\mathcal{K}} \cup \{\neg\alpha\}$. Wir betrachten nun das präferentielle Modell

$$\mathcal{S} :=_{\mathbf{def}} (\{\mathcal{A}\}, \models, \mathbf{id}, \mathbf{Cons}) \text{ mit } \mathbf{Cons}(\Phi) :=_{\mathbf{def}} \mathbf{Cn}(\widetilde{\mathcal{K}} \cup \{\neg\alpha\} \cup \Phi).$$

Offensichtlich ist $\mathcal{S}$ tatsächlich ein präferentielles Modell für $\mathcal{K}$. Aber die bedingte Behauptung "$\top \mid\!\sim \alpha$" gilt nicht in $\mathcal{S}$, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Sei nun $\widetilde{\mathcal{K}} \models \alpha$. Wir leiten $\top \mid\!\sim \alpha$ unter Zuhilfenahme von *Reflexivität*, *Right Weakening* und der abgeleiteten Regeln *(S)* und *(AND)* aus Abschnitt 4.1.4 des letzten Kapitels her. Mit *(S)* kann man $\top \mid\!\sim (\gamma \rightarrow \delta)$ für alle $\gamma \mid\!\sim \delta \in \mathcal{K}$ herleiten. Zusammen mit *(AND)* folgt also, daß

$$\top \mid\!\sim \bigwedge_{\gamma \mid\sim \delta \,\in\, \mathcal{K}} \gamma \rightarrow \delta$$

aus $\mathcal{K}^{\mathbf{pref}}$ herleitbar ist. Da $\widetilde{\mathcal{K}} \models \alpha$ also

$$[\ \bigwedge_{\gamma \mid\sim \delta \,\in\, \mathcal{K}} (\gamma \rightarrow \delta)\ ]\ \rightarrow \alpha$$

allgemeingültig ist, folgt mit *Right Weakening* (und $\top \mid\!\sim \top$)

$$\top \mid\!\sim \alpha.$$

■

Damit ergibt sich als Korollar sofort das folgende

Korollar 5.2.4 (Lehmann/Magidor)
α ist eine Ausnahmeformel für $\mathcal{K}$ gdw $\widetilde{\mathcal{K}} \models \neg\alpha$.

Beweis: Man wendet das Theorem auf $\neg\alpha$ anstatt α an und benutzt die Definition der Ausnahmeformel.

■

Dies ermöglicht es, den rationalen Abschluß mit einem aussagenlogischen Beweiser zu berechnen.

Bevor wir mit dem Aufbau der Theorie der Ausnahmeformeln und ihrem Zusammenhang mit dem rationalen Abschluß fortfahren, wollen wir an einem Beispiel die Bedeutung dieses Konzepts verdeutlichen. Wir betrachten dazu das obige Beispiel 4.4.1: Sei $\mathbf{C}_0$ die Menge aller bedingten Aussagen aus Beispiel 4.4.1. Man sieht leicht, daß $\neg$**vogel** und $\neg$**pinguin** logische Konsequenzen aus $\widetilde{\mathbf{C}_0}$ sind. Damit sind **vogel** und **pinguin** Ausnahmeformeln für $\mathbf{C}_0$:

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_1 = \quad \{ \quad & \mathbf{vogel} \mid\!\sim \mathbf{tier}, \\ & \mathbf{vogel} \mid\!\sim \mathbf{fliegt}, \\ & \mathbf{pinguin} \mid\!\sim \mathbf{vogel}, \\ & \mathbf{pinguin} \mid\!\sim \neg\mathbf{fliegt} \\ \} \quad & \end{aligned}$$

Bezüglich $\mathbf{C}_1$ ist nur noch **pinguin** eine Ausnahmeformel. Also:

$$\mathbf{C}_2 = \{\mathbf{pinguin} \mid\!\sim \mathbf{vogel}, \mathbf{pinguin} \mid\!\sim \neg\mathbf{fliegt}\}$$

Schließlich ist $\mathbf{C}_3 = \emptyset$. Der formale Begriff der Ausnahmeformel korrespondiert also recht gut mit dem beobachteten Phänomen der mehrfachen Ausnahmen.
Für eine Formel α wird für jedes $\mathbf{C_i}$ überprüft, ob sie eine Ausnahmeformel für $\mathbf{C_i}$ ist. Dies führt zum Begriff des *Ranges einer Formel*:

Definition 5.2.5 (Rang von α bezüglich $\mathcal{K}$)
Ist α eine Ausnahmeformel für $\mathbf{C}_0, \ldots, \mathbf{C_{k-1}}$ und keine Ausnahmeformel für $\mathbf{C_k}$, $\mathbf{C_{k+1}}$, ..., so heißt $\mathbf{k}$ der Rang *von α. Wenn α keine Ausnahmeformel für $\mathbf{C_k}$ ist, so folgt automatisch, daß α keine Ausnahmeformel ist für alle $\mathbf{C_i}$ mit $\mathbf{i} \geq \mathbf{k}$.*

Ist α eine Ausnahmeformel für alle $\mathbf{C_i}$ ($\mathbf{i} \geq 0$), so sagt man: α hat keinen Rang.

Definition 5.2.6 ($\mathcal{K}^{\mathbf{rat}}$)
Sei $\mathcal{K}$ eine Wissensbasis. $\mathcal{K}^{\mathbf{rat}}$ besteht aus allen bedingten Behauptungen $\alpha \mid\!\sim \beta$, so daß entweder

1. *der Rang von α echt kleiner ist als der Rang von $\alpha \wedge \neg\beta$ (einschließlich des Falles, daß α einen Rang hat und $\alpha \wedge \neg\beta$ keinen) oder*

2. *α keinen Rang hat.*

Theorem 5.2.7 ($\mathcal{K}^{\mathbf{rat}}$ ist rationale Erweiterung von $\mathcal{K}$)
Für jede Wissensbasis $\mathcal{K}$ existiert $\mathcal{K}^{\mathbf{rat}}$. Außerdem ist $\mathcal{K}^{\mathbf{rat}}$ abgeschlossen unter den Regeln des Systems $\mathcal{P}$ und $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}^{\mathbf{rat}}$. Insbesondere it also $\mathcal{K}^{\mathbf{pref}} \subseteq \mathcal{K}^{\mathbf{rat}}$.

Beweis: Der Nachweis von *(Left Logical Eqivalence)*, *(Right Weakening)* und *(Reflxivität)* ist trivial.

Betrachten wir zuerst die *vorsichtige Monotonie*. Ist $\alpha \mid\sim \beta \in \mathcal{K}^{\mathbf{rat}}$, dann haben α und $\alpha \wedge \beta$ denselben Rang (oder keinen). Also gilt diese Bedingung.

Analog verhält es sich für die *Rationalität*. Falls $\alpha \mid\sim \neg\beta \notin \mathcal{K}^{\mathbf{rat}}$, dann haben α und $\alpha \wedge \beta$ denselben Rang (oder keinen).

Ähnlich ist es für *(Oder)*: Der Rang einer Disjunktion ist nämlich das Minimum der beiden Teilformeln.

Nun zeigen wir, daß $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}^{\mathbf{rat}}$. Sei $\alpha \mid\sim \beta \in \mathcal{K}$. Falls α keinen Rang hat, folgt $\alpha \mid\sim \beta \in \mathcal{K}^{\mathbf{rat}}$ und wir sind fertig. α habe also einen Rang $\mathbf{n}$. Dann ist $\alpha \mid\sim \beta \in \mathbf{C_n}$ also $\widetilde{\mathbf{C_n}} \models \neg\alpha \vee \beta$, d.h. $\alpha \wedge \neg\beta \in \mathbf{Ausnahme}(\mathbf{C_n})$, also ist der Rang von $\alpha \wedge \neg\beta$ größer als der von α, und damit ist $\alpha \mid\sim \beta \in \mathcal{K}^{\mathbf{rat}}$. ∎

5.2.1 Lehmann/Magidors Algorithmus für $\mathcal{K}^{\mathbf{rat}}$

Aufgrund der Aussage von Definition 5.2.6 läßt sich folgender Algorithmus angeben. Der zuerst in [LM92] angegebene Algorithmus enthielt einen Fehler. Wir geben unsere korrigierte Version wieder:

Theorem 5.2.8 (Algorithmus zur Berechnung von $\mathcal{K}^{\mathbf{rat}}$)
Der folgende Algorithmus berechnet den rationalen Abschluß:

```
K: Wissensbasis,
?- α |~ β: die Anfrage an K

C :=def K ;
while (α ist Ausnahmeformel für C und Ausnahme(C) ≠ C) do
  C :=def Ausnahme(C) ;
if (α ist Ausnahmeformel für C)
  Ausgabe Ja                 {Definition 5.2.6, α hat keinen Rang}
else
  if (α ∧ ¬β ist Ausnahmeformel für C)
        Ausgabe Ja           {Definition 5.2.6, Fall 1}
  else
       Ausgabe Nein ;
```

Der Algorithmus liefert Ja <u>gdw</u> $\alpha \mid\sim \beta \in \mathcal{K}^{\mathbf{rat}}$.

Eine Implementierung in Prolog ist nun sehr einfach, wenn wir einen aussagenlogischen Beweiser ankoppeln. Wir benutzen das Prädikat

```
rat([L1],[a,b]).
```

Hierbei steht L1 für die Liste aller Zusicherungen in der Wissensbasis (diese werden als Paare [x,y] dargestellt) und [a,b] für die Anfrage an die Wissensbasis.

5.2.2 Zusammenhang zwischen $\mathcal{K}^{\mathbf{pref}}$ und $\mathcal{K}^{\mathbf{rat}}$

$\mathcal{K}^{\mathbf{rat}}$ kann mit dem obigen Algorithmus effizient berechnet werden. Für bedingte Behauptungen einer speziellen Form, nämlich "$\alpha \mathrel{|\!\sim} \Box$", sind $\mathcal{K}^{\mathbf{pref}}$ und $\mathcal{K}^{\mathbf{rat}}$ sogar äquivalent:

Lemma 5.2.9 ($\mathcal{K}^{\mathbf{pref}}$ und $\mathcal{K}^{\mathbf{rat}}$ für $\alpha \mathrel{|\!\sim} \Box$)
Seien $\mathcal{K}$ und $\alpha \in \mathbf{Fml}_{\mathcal{L}}$ gegeben. Es gilt:

$$\alpha \mathrel{|\!\sim} \Box \in \mathcal{K}^{\mathbf{pref}} \quad \underline{\text{gdw}} \quad \alpha \mathrel{|\!\sim} \Box \in \mathcal{K}^{\mathbf{rat}}.$$

Beweis: Die Richtung "$\Longleftarrow$" folgt aus Theorem 5.2.7.

Wir zeigen nun "$\Longrightarrow$". Sei $\mathcal{S} :=_{\mathbf{def}} (\mathbf{S}, \models, \prec, \mathbf{Cons})$ ein präferentielles Modell. Nach Voraussetzung gilt $\widetilde{\mathcal{K}} \models \alpha$ (denn α und $\alpha \wedge \neg\Box$ haben denselben Rang, also gar keinen). Mit Theorem 5.2.3 folgt

$$\top \mathrel{|\!\sim} \neg\alpha \in \mathcal{K}^{\mathbf{pref}},$$

d.h. für alle $\mathbf{s} \in \mathbf{S}$: $\mathbf{s} \models \neg\alpha$. Für alle $\mathbf{s} \in \mathbf{S}$ mit $\mathbf{s} \models_{\prec} \alpha$ gilt daher: $\mathbf{s} \models \neg\alpha$ und $\mathbf{s} \models \alpha$, also (da $\models$ sich klassisch verhält) $\mathbf{s} \models \Box$. Also ist $\alpha \mathrel{|\!\sim} \Box$ wahr in $\mathcal{S}$, das beliebig gewählt war. ∎

Mithilfe des letzten Lemmas haben wir einen interessanten Zusammenhang zwischen $\mathcal{K}^{\mathbf{rat}}$ und $\mathcal{K}^{\mathbf{pref}}$ gefunden:

Theorem 5.2.10 (Zurückführung von $\mathcal{K}^{\mathbf{pref}}$ auf $\mathcal{K}^{\mathbf{rat}}$)
Es gilt:

$$\alpha \mathrel{|\!\sim} \beta \in \mathcal{K}^{\mathbf{pref}} \quad \underline{\text{gdw}} \quad \alpha \mathrel{|\!\sim} \Box \in (\mathcal{K} \cup \{\alpha \mathrel{|\!\sim} \neg\beta\})^{\mathbf{rat}}$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{gathered} \alpha \mathrel{|\!\sim} \beta \in \mathcal{K}^{\mathbf{pref}} \\ \underline{\text{gdw}} \\ \alpha \mathrel{|\!\sim} \Box \in (\mathcal{K} \cup \{\alpha \mathrel{|\!\sim} \neg\beta\})^{\mathbf{pref}} \\ \underline{\text{gdw}} \\ \alpha \mathrel{|\!\sim} \Box \in (\mathcal{K} \cup \{\alpha \mathrel{|\!\sim} \neg\beta\})^{\mathbf{rat}}. \end{gathered}$$

Die erste Äquivalenz gilt wegen Theorem 4.4.5, die zweite wegen Lemma 5.2.9. ∎

Damit ist es möglich, auch $\mathcal{K}^{\mathbf{pref}}$ unter Verwendung von $\mathcal{K}^{\mathbf{rat}}$ sehr effizient zu implementieren.

```
pref(K,[A,B]) :- rat([[A,-B]|K],[A,a & -a]).
```

5.3 Darstellung von sicherem Wissen $\Sigma_\mathbf{s}$

Da in Lehmann und Magidors Ansatz in der Wissensbasis nur Formeln der Form $\alpha \mathrel{|\!\sim} \beta$ vorkommen, stellt die Formalisierung von in Prosa gegebenem Wissen ein nicht unerhebliches Problem dar. Denn auch festes, sicheres Wissen muß in abgeschwächter Form ($\mathrel{|\!\sim}$) dargestellt werden. Zum Beispiel ist die Prosa-Aussage *Pinguine sind Vögel* eine feste Aussage ohne Ausnahmen (es gibt keine Pinguine, die nicht Vögel sind). Trotzdem wird diese Aussage üblicherweise mit **pinguin** $\mathrel{|\!\sim}$ **vogel** in die Wissensbasis übernommen. Auch auf die Aussage **pinguin** $\mathrel{|\!\sim} \neg$**fliegt** trifft dies zu. Lediglich die Aussage **vogel** $\mathrel{|\!\sim}$ **fliegt** verdient diese Darstellung.

Während in [KLM90] noch die Möglichkeit zur Darstellung von sicherem Wissen bestand (in Form der gewählten Menge $\mathbf{W}$ von Welten: $\mathbf{W}$ entspricht unserem $\Sigma_\mathbf{s}$ via $\Sigma_\mathbf{s} = \mathbf{Cn}(\mathbf{W})$) wurde in der Nachfolgearbeit darauf verzichtet. Der Grund liegt darin, daß Lehmann und Magidor sicheres Wissen α als $\neg\alpha \mathrel{|\!\sim} \Box$ in $\mathcal{K}$ übernehmen. Dieser Schwachpunkt in Lehmann und Magidors Formalisierung führte uns zu den Überlegungen, andere Formalisierungen beziehungsweise eine Modifikation des Algorithmus auszuprobieren.

5.3.1 5 Möglichkeiten zur Modellierung von $\Sigma_\mathbf{s}$

Zur Kombination von sicherem Wissen $\Sigma_\mathbf{s} = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots\}$ mit Default-Wissen haben wir die folgenden Möglichkeiten betrachtet:

1. W: Die in [KLM90] beschriebene Methode mit $\mathbf{W}$.

2. $\mathcal{K} :=_{\mathbf{def}} \mathcal{H} \cup \mathcal{W}$**:** Einen modifizierten Algorithmus für $\mathcal{K}^{\mathbf{rat}}$. Die oben erwähnte Möglichkeit $\mathcal{K}^{\mathbf{rat}}$ zur Berechnung von $\mathcal{K}^{\mathbf{pref}}$ zu benutzen, funktioniert nur für $\mathbf{W} = \mathbf{Mod}(\{\top\})$. Allerdings zeigt eine genaue Inspektion des Algorithmus, wie er modifiziert werden muß, um auch für den Fall, daß $\mathbf{W}$ irgendeine Menge von Modellen ist, den präferentiellen Abschluß zu berechnen.

Dieser modifizierte Algorithmus erhält als Eingabe eine Wissensbasis $\mathcal{K}$, die zwischen *hartem* (sicherem) und *weichem* (unsicherem) Wissen unterscheidet: $\mathcal{K} :=_{\mathbf{def}} \mathcal{H} \cup \mathcal{W}$.

3. $\neg\sigma \mathrel{|\!\sim} \Box$**:** Lehmanns Methode σ durch $\neg\sigma \mathrel{|\!\sim} \Box$ darzustellen.

4. $(\alpha \wedge \Sigma_\mathbf{s}) \mathrel{|\!\sim} \beta$**:** Unsere Methode, in $\mathcal{K}$ nur unsicheres Wissen darzustellen und sicheres Wissen $\Sigma_\mathbf{s}$ in die Anfrage einzubringen: Anstatt der Anfrage "$\alpha \mathrel{|\!\sim} \beta$" betrachten wir die Anfrage "$(\alpha \wedge \Sigma_\mathbf{s}) \mathrel{|\!\sim} \beta$".

5. $\top \mathrel{|\!\sim} \sigma$**:** Stelle σ durch $\top \mathrel{|\!\sim} \sigma$ dar. Dies dient nur der Vollständigkeit halber. Intuitiv ist ein Faktum σ, das als $\top \mathrel{|\!\sim} \sigma$ dargestellt wird, natürlich sehr unsicher.

Aus den Vollständigkeitssätzen folgt leicht, daß alle fünf Ansätze bezüglich $\mathcal{K}^{\mathbf{pref}}$ oder $\mathcal{K}^{\mathbf{cum}}$ äquivalent sind. Allerdings müssen wir die Möglichkeit 2. gesondert betrachten, da sie ja nur für den präferentiellen Abschluß definiert werden wird (in Abschnitt 5.3.2). Wir zeigen also

Theorem 5.3.1 (Äquivalenz von 1., 3., 4. und 5. für $\mathcal{K}^{\mathbf{pref}}$ und $\mathcal{K}^{\mathbf{cum}}$)
Die oben beschriebenen Methoden, sicheres Wissen zu formalisieren, sind bezüglich $\mathcal{K}^{\mathbf{pref}}$ bzw. $\mathcal{K}^{\mathbf{cum}}$ alle äquivalent.

Beweis: Seien $\mathcal{K}$, $\Sigma_{\mathbf{s}}$ und eine Anfrage $\alpha \mid\!\sim \beta$ gegeben. Sei $\mathbf{W} = \mathbf{MOD}(\Sigma_{\mathbf{s}})$ und für ein MAK-Modell $\mathcal{S} = (\mathbf{S}, \models\!\equiv, \prec, \mathbf{Cons_W})$ sei $\mathcal{S}' = (\mathbf{S}, \models\!\equiv, \prec, \mathbf{Cons_{AL}})$ das zugehörige MAK-Modell, in dem $\Sigma_{\mathbf{s}}$ eliminiert ist. Sei weiterhin

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_3 &:=_{\mathbf{def}} \mathcal{K} \ \cup \ \{\neg\sigma \mid\!\sim \Box :\ \sigma \in \Sigma_{\mathbf{s}}\},\\ \mathcal{K}_5 &:=_{\mathbf{def}} \mathcal{K} \ \cup \ \{\top \mid\!\sim \sigma :\ \sigma \in \Sigma_{\mathbf{s}}\},\end{aligned}$$

Aus den Vollständigkeitssätzen für $\mathcal{K}^{\mathbf{pref}}$ bzw. $\mathcal{K}^{\mathbf{cum}}$ folgt sofort:

$$\begin{array}{ll} & \mathcal{S} \text{ ist Modell von } \mathcal{K} \cup \{\alpha \mid\!\sim \beta\}\\ \underline{\text{gdw}} & \mathcal{S}' \text{ ist Modell von } \mathcal{K}_3 \cup \{\alpha \mid\!\sim \beta\}\\ \underline{\text{gdw}} & \mathcal{S}' \text{ ist Modell von } \mathcal{K} \cup \{(\alpha \wedge \Sigma_{\mathbf{s}}) \mid\!\sim \beta\}\\ \underline{\text{gdw}} & \mathcal{S}' \text{ ist Modell von } \mathcal{K}_5 \cup \{\alpha \mid\!\sim \beta\}\end{array}$$

Damit folgt erst recht die Behauptung. ■

Was $\mathcal{K}^{\mathbf{rat}}$ betrifft, so sind 2. und 3. äquivalent, aber 3., 4. und 5. paarweise inäquivalent (die Bedingung 1. macht hier ja keinen Sinn). Dieser Sachverhalt wird in Abschnitt 5.4.2 anhand der dortigen Beispiele illustriert. Daß sich $\mathcal{K}^{\mathbf{pref}}$ und $\mathcal{K}^{\mathbf{rat}}$ im Hinblick auf 1. bis 5. so sehr unterscheiden ist bemerkenswert — die Gründe hierfür sollten genauer untersucht werden.

5.3.2 Rationaler Abschluß mit harten Fakten

Wir stellen hier unseren modifizierten Algorithmus vor und zeigen, daß er äquivalent zu Lehmanns Methode, sicheres Wissen α als $\neg\alpha \mid\!\sim \Box$ darzustellen, ist. Diese Überlegungen sollen am Beispiel 5.4.1 (Pinguine sind Vögel, Pinguine fliegen normalerweise nicht, Vögel fliegen normalerweise) demonstriert werden.

In der Wissensbasis $\mathcal{K}$ wird nun zwischen *harten* und *weichen* Aussagen unterschieden: $\mathcal{K} :=_{\mathbf{def}} \mathcal{H} \cup \mathcal{W}$. Also:

$$\mathcal{H} :=_{\mathbf{def}} \{\mathbf{pinguin} \mid\!\sim \mathbf{vogel}\},\ \mathcal{W} :=_{\mathbf{def}} \{\mathbf{vogel} \mid\!\sim \mathbf{fliegt}, \mathbf{pinguin} \mid\!\sim \neg\mathbf{fliegt}\}.$$

Die Berechnung von $\mathbf{Ausnahme(C)}$ und die Untersuchung auf Exzeptionalität einer Formel α wird wie bisher bezüglich $\mathcal{H} \cup \mathcal{W}$ durchgeführt, jedoch wird nach jeder Berechnung von $\mathbf{Ausnahme(C)}$ die Menge $\mathcal{H}$ wieder hinzugenommen

$$\mathbf{Ausnahme(C)} :=_{\mathbf{def}} \mathbf{Ausnahme(C)} \cup \mathcal{H}.$$

Dies bewirkt, daß harte Fakten nie herausfallen, also immer

$$\mathcal{H} \subset \mathbf{C_i}$$

gilt. Offensichtlich ergibt sich genau derselbe Effekt, wenn man, anstatt die Behauptung $\mathbf{pinguin} \mid\!\sim \mathbf{vogel}$ in $\mathcal{H}$ zu lassen, die Formel $\neg(\mathbf{pinguin} \to \mathbf{vogel}) \mid\!\sim \Box$ in $\mathcal{W}$ aufnimmt: In $\widetilde{\mathcal{W}}$ ist ja $\neg(\mathbf{pinguin} \to \mathbf{vogel}) \mid\!\sim \Box$ äquivalent zu $\neg\mathbf{pinguin} \vee \mathbf{vogel}$, also zur Übersetzung von $\mathbf{pinguin} \mid\!\sim \mathbf{vogel}$ in $\widetilde{\mathcal{W}}$.

Definition 5.3.2 (Modifizierter Algorithmus für $\mathcal{K} = \mathcal{H} \cup \mathcal{W}$)
Der modifizierte Algorithmus lautet wie folgt:

$\mathcal{K} = \mathcal{H} \cup \mathcal{W}$: *Wissensbasis,*
?- $\alpha \mid\!\sim \beta$: *die Anfrage an* $\mathcal{K}$

$C :=_{\mathbf{def}} \mathcal{H} \cup \mathcal{W}$;
while (α *ist Ausnahmeformel für C and Ausnahme(C)* $\cup\, \mathcal{H} \neq C$*) do*
  $C :=_{\mathbf{def}}$ *Ausnahme(C)* $\cup\, \mathcal{H}$;
if (α *ist Ausnahmeformel für C)*
  Ausgabe Ja {*Definition 5.2.6,* α *hat keinen Rang*}
else
  if ($\alpha \wedge \neg\beta$ *ist Ausnahmeformel für C)*
    Ausgabe Ja {*Definition 5.2.6, Fall 1*}
  else
    Ausgabe Nein;

Die zugehörigen Programme `rat_hart` und `pref_hart` haben die folgende Syntax:

```
rat_hart(W,H,[A,B])

pref_hart(W,H,[A,B]) :- rat_hart([[A,-B]|W],H,[A,a & -a]).
```

Dabei ist W die Liste der weichen und H die Liste der harten Fakten.

Man beachte, daß unser modifizierter Algorithmus auch zur Berechnung des präferentiellen Abschlusses benutzt werden kann: Er stimmt dann mit dem in [KLM90] beschriebenen präferentiellen Abschluß mit entsprechend gewähltem $\Sigma_{\mathbf{s}}$ überein:

Theorem 5.3.3 (Mod. Algorithmus berechnet $\mathcal{K}^{\mathbf{pref}}$)
Ist eine Wissensbasis $\mathcal{K}$ *und eine Theorie* $\Sigma_{\mathbf{s}} :=_{\mathbf{def}} \{\varphi_1, \ldots, \varphi_{\mathbf{n}}\}$ *gegeben und setzen wir* $\mathcal{K}_{\mathbf{mod}} :=_{\mathbf{def}} \mathcal{H} \cup \mathcal{W}$ *mit* $\mathcal{H} :=_{\mathbf{def}} \{\top \mid\!\sim \varphi_1, \ldots \top \mid\!\sim \varphi_{\mathbf{n}}\}$ *und* $\mathcal{W} :=_{\mathbf{def}} \mathcal{K}$*, so berechnet der modifizierte Algorithmus angewandt auf* $\mathcal{K}_{\mathbf{mod}}$ *genau den präferentiellen Abschluß von* $\mathcal{K}$ *bezüglich* $\Sigma_{\mathbf{s}}$*.*

5.3.3 Kanonische Umsetzung in Aussagenlogik

Eine weitere Möglichkeit der Formalisierung besteht darin, ein gegebenes Problem in kanonischer Weise in ein aussagenlogisches umzuwandeln. Anstatt

$$\mathbf{vogel(x)} \mid\!\sim \mathbf{fliegt(x)}$$

ersetzen wir alle Prädikate durch Instanzen und führen so neue Aussagenkonstanten ein. Wir können so eine gegebene Formelmenge der Prädikatenlogik äquivalent (im Sinne der klassischen Logik) in eine aussagenlogische Formelmenge umwandeln, wenn das zugehörige Herbrand-Universum endlich ist — dies ist bei unseren Beispielen immer der Fall.

Für das in diesem Abschnitt betrachtete Beispiel führen wir daher $\mathbf{V_{fred}}$ und $\mathbf{V_{tweety}}$ ein. $\mathbf{V_{fred}}$, bzw. $\mathbf{V_{tweety}}$, stehen für *Individuum* **fred** *ist ein Vogel* bzw. *Individuum* **tweety** *ist ein Vogel*. Die Aussage **vogel** $\mid\!\sim$ **fliegt** wird nun also durch $\mathbf{V_{fred}} \mid\!\sim \mathbf{F_{fred}}$ und $\mathbf{V_{tweety}} \mid\!\sim \mathbf{F_{tweety}}$ formalisiert.

Ein Nachteil dieser Formalisierung ist, daß für die im Algorithmus berechnete Menge $\mathbf{C_i}$ mit $\mathbf{Ausnahme}(\mathbf{C_i}) = \mathbf{C_i}$ die zugeordnete Menge $\widetilde{\mathbf{C_i}}$ in vielen Fällen inkonsistent ist. Damit ist aber jede Anfrage bezüglich $\mathbf{C_i}$ eine Ausnahmebedingung und der Algorithmus antwortet in einer solchen Situation immer “Ja”.

In unserem Beispiel heißt das

$$\mathcal{K} \supset \{\mathbf{V_{tweety}} \mid\!\sim \mathbf{F_{tweety}},\ \mathbf{V_{fred}} \mid\!\sim \mathbf{F_{fred}}, \mathbf{P_{fred}} \mid\!\sim \neg\mathbf{F_{fred}},\ \mathbf{P_{tweety}} \mid\!\sim \neg\mathbf{F_{tweety}}\}$$

unabhängig davon, wie man die sichere Aussage “Pinguine sind Vögel” in $\mathcal{K}$ aufnimmt! In jedem Fall ist die im Algorithmus benötigte Menge $\widetilde{\mathcal{K}}$ offensichtlich unerfüllbar.

Ferner kommt in jeder nichtmonotonen Problemstellung eine Konstellation dieser Form vor:

- *unsicher:* aus α folgt normalerweise β,
- *sicher:* aus γ folgt α,
- *sicher:* aus γ folgt $\neg\beta$.

Dies ist typisch für nichtmonotone Probleme: γ ist die Ausnahme zu $\alpha \mid\!\sim \beta$. Jede Formalisierung, in der wir noch zusätzlich γ (als weiches oder hartes Faktum) mit aufnehmen, führt zu einer inkonsistenten Menge $\widetilde{\mathcal{K}}$, d.h. jede Anfrage ist eine Ausnahmeformel und damit im rationalen Abschluß enthalten. Wir halten dies für einen Schwachpunkt von $\mathcal{K}^{\mathbf{rat}}$. Dieses Problem trifft erst recht auf den präferentiellen Abschluß zu, da dieser ja auf den rationalen zurückgeführt werden kann und sich dabei die Wissensbasis sogar noch vergrößert.

Diese Inkonsistenz kann für den rationalen Abschluß vermieden werden, wenn man die modifizierte Anfrage betrachtet, also die Möglichkeit 4. aus Abschnitt 5.3.1. Allerdings ist diese Methode für fast alle Beispiele in Abschnitt 5.3.1 zu schwach.

Der präferentielle Abschluß ist auch für die modifizierte Anfrage noch inkonsistent, wird also immer “Ja” antworten (siehe Theorem 5.3.1).

5.4 Wie stark ist $\mathcal{K}^{\mathbf{rat}}$ im Vergleich zu $\mathcal{K}^{\mathbf{pref}}$?

In Abschnitt 5.4.1 illustrieren wir beide Abschlüsse zunächst an unseren 3 Wissensbasen $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ und $\mathcal{K}_3$ aus Abschnitt 5.1. In Abschnitt 5.4.2 führen wir dann eine Menge von neuen Beispielen und ihren Formalisierungen ein. Für jedes Beispiel geben wir die Antworten des präferentiellen bzw. des rationalen Abschlusses an.

5.4.1 Erste Ergebnisse

Der präferentielle Abschluß

Für $\mathcal{K}_1$ lieferte der Algorithmus *Ja* für

$$\begin{array}{lcl}
\mathbf{fliegt} & \mid\!\sim & \neg\mathbf{pinguin} \\
\mathbf{vogel} & \mid\!\sim & \neg\mathbf{pinguin} \\
\mathbf{vogel} \wedge \mathbf{pinguin} & \mid\!\sim & \neg\mathbf{fliegt}
\end{array}$$

und *nein* für

$$\begin{array}{lcl}
\neg\mathbf{fliegt} & \mid\!\sim & \neg\mathbf{vogel} \\
\neg\mathbf{fliegt} & \mid\!\sim & \neg\mathbf{pinguin} \\
\neg\mathbf{vogel} & \mid\!\sim & \neg\mathbf{pinguin} \\
\mathbf{pinguin} \wedge \mathbf{black} & \mid\!\sim & \neg\mathbf{fliegt} \\
\mathbf{vogel} \wedge \mathbf{green} & \mid\!\sim & \mathbf{fliegt} \\
\mathbf{vogel} \wedge \neg\mathbf{fliegt} & \mid\!\sim & \mathbf{pinguin} \\
\mathbf{vogel} \wedge \neg\mathbf{fliegt} & \mid\!\sim & \neg\mathbf{pinguin} \\
\mathbf{pinguin} & \mid\!\sim & \mathbf{fliegt}
\end{array}$$

Man beachte, daß in einigen Anfragen auch neue aussagenlogische Konstanten (die nicht in der Wissensbasis auftreten), nämlich **green** und **black**, vorkommen. Dies wurde schon in Abschnitt 4.5 des letzten Kapitels angesprochen.

Für die Wissensbasis $\mathcal{K}_2$ gab es hingegen keinen Unterschied in den Ergebnissen zwischen rationalem Abschluß und präferentiellem Abschluß, jedenfalls wenn man nur Anfragen berücksichtigt, die die in der Wissensbasis auftretenden Konstanten benutzen. Hingegen lagen alle Folgerungen von Beispiel $\mathcal{K}_3$ nicht im präferentiellen Abschluß. Hier wird die größere Leistungsfähigkeit des rationalen Abschlusses besonders deutlich. Der nächste Abschnitt illustriert die Antworten des rationalen Abschlusses für $\mathcal{K}_2$ und $\mathcal{K}_3$.

Der rationale Abschluß

Wir betrachten zunächst $\mathcal{K}_1$. Der Algorithmus lieferte *Ja* für

$$\begin{array}{lcl}
\mathbf{fliegt} & \mid\!\sim & \neg\mathbf{pinguin} \\
\neg\mathbf{fliegt} & \mid\!\sim & \neg\mathbf{vogel} \\
\neg\mathbf{fliegt} & \mid\!\sim & \neg\mathbf{pinguin} \\
\mathbf{vogel} & \mid\!\sim & \neg\mathbf{pinguin} \\
\neg\mathbf{vogel} & \mid\!\sim & \neg\mathbf{pinguin} \\
\mathbf{vogel} \wedge \mathbf{pinguin} & \mid\!\sim & \neg\mathbf{fliegt} \\
\mathbf{black} \wedge \mathbf{pinguin} & \mid\!\sim & \neg\mathbf{fliegt} \\
\mathbf{vogel} \wedge \mathbf{green} & \mid\!\sim & \mathbf{fliegt}
\end{array}$$

und *nein* lediglich für

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{vogel} \wedge \neg\mathbf{fliegt} & \mid\!\sim & \mathbf{pinguin} \\ \mathbf{vogel} \wedge \neg\mathbf{fliegt} & \mid\!\sim & \neg\mathbf{pinguin} \\ \mathbf{pinguin} & \mid\!\sim & \mathbf{fliegt}. \end{array}$$

Betrachten wir nun $\mathcal{K}_2$.

$$\mathcal{K}_2 :=_{\mathbf{def}} \{ \begin{array}{lcl} \mathbf{tier} & \mid\!\sim & \neg\mathbf{fliegt} \\ \mathbf{vogel} & \mid\!\sim & \mathbf{tier} \\ \mathbf{vogel} & \mid\!\sim & \mathbf{fliegt} \\ \mathbf{pinguin} & \mid\!\sim & \mathbf{vogel} \\ \mathbf{pinguin} & \mid\!\sim & \neg\mathbf{fliegt} \; \} \end{array}$$

Mit *Ja* wurden

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{tier} \wedge \neg\mathbf{vogel} & \mid\!\sim & \neg\mathbf{fliegt} \\ \mathbf{vogel} \wedge \neg\mathbf{pinguin} & \mid\!\sim & \mathbf{fliegt} \\ \mathbf{tier} \wedge \mathbf{vogel} & \mid\!\sim & \neg\mathbf{fliegt} \\ \mathbf{tier} & \mid\!\sim & \neg\mathbf{vogel} \end{array}$$

beantwortet.
Auch $\mathcal{K}_3$ wird vom rationalen Abschluß richtig behandelt: Der Algorithmus lieferte *Ja* für

$$\mathbf{quaker} \wedge \neg\mathbf{republican} \mid\!\sim \mathbf{pacifist} \text{ und } \mathbf{republican} \wedge \neg\mathbf{quaker} \mid\!\sim \neg\mathbf{pacifist}.$$

Er liefert *Nein* für

$$\mathbf{quaker} \wedge \mathbf{republican} \mid\!\sim \mathbf{pacifist} \text{ und } \mathbf{republican} \wedge \mathbf{quaker} \mid\!\sim \neg\mathbf{pacifist}.$$

Als Beispiel seien noch die Ausgaben des Programms `pref` und `rat` für $\mathcal{K}_3$ angegeben. Man beachte, daß auch der Rang der Anfrage bezüglich der jeweiligen Wissensbasis berechnet wird.

```
?- pref([[a,-f],[b,a],[b,f],
             [p,b],[p,-f]],
            [a & -b,-f]).
   Ja, Anfrage hat keinen Rang, n = 0

?- rat([[a,-f],[b,a],[b,f],
               [p,b],[p,-f]],
              [a & -b,-f]).
   Ja, Rang der Anfrage bez. K = 0;


?- pref([[a,-f],[b,a],[b,f],
             [p,b],[p,-f]],
```

```
            [b & -p,f]).
   Ja, Anfrage hat keinen Rang, n = 2

?- rat([[a,-f],[b,a],[b,f],
              [p,b],[p,-f]],
             [b & -p,f]).
   Ja, Rang der Anfrage bez. K = 1;



?- pref([[a,-f],[b,a],[b,f],
              [p,b],[p,-f]],
            [p,-f]).
   Ja, Anfrage hat keinen Rang, n = 2

?- rat([[a,-f],[b,a],[b,f],
               [p,b],[p,-f]],
             [p,-f]).
   Ja, Rang der Anfrage bez. K = 2;
```

5.4.2 Systematischer Vergleich

Wir benutzen die folgenden vier Programmaufrufe:

`pref([K],[a,b])`: Ist $\mathtt{a} \mid\!\sim \mathtt{b} \in \mathcal{K}^{\mathbf{pref}}$? Hierbei ist keine Darstellung von *hartem* (d.h. sicherem Wissen $\Sigma_{\mathbf{s}}$) vorgesehen.

`pref_hart([W],[H],[a,b])`: Ist $\mathtt{a} \mid\!\sim \mathtt{b} \in \mathcal{K}^{\mathbf{pref}}$? Hier wird zwischen unsicherem und sicherem Wissen unterschieden: $\mathcal{K} = \mathcal{W} \cup \mathcal{H}$.

`rat([K],[a,b])`: Ist $\mathtt{a} \mid\!\sim \mathtt{b} \in \mathcal{K}^{\mathbf{rat}}$? Hierbei ist keine Darstellung von *hartem* (d.h. sicherem Wissen $\Sigma_{\mathbf{s}}$) vorgesehen.

`rat_hart([W],[H],[a,b])`: Ist $\mathtt{a} \mid\!\sim \mathtt{b} \in \mathcal{K}^{\mathbf{rat}}$? Hier wird zwischen unsicherem und sicherem Wissen unterschieden: $\mathcal{K} = \mathcal{W} \cup \mathcal{H}$.

Bevor wir die Beispiele und die Ergebnisse des rationalen bzw. des präferentiellen Abschlusses angeben, wollen wir zuvor die betrachteten Formalisierungsmöglichkeiten erläutern.

Wir haben die beiden grundsätzlich verschiedenen Formalisierungen aus Abschnitt 5.3 betrachtet:

I. Präd. Formalisierung: Die erste Formalisierung (siehe auch Abschnitt 5.3.3) erhält man, indem man das üblicherweise in Prädikatenlogik erster Stufe formulierte Problem in ein äquivalentes, aussagenlogisches umwandelt. Das ist fast immer möglich, da der zugrundeliegende Individuenbereich endlich ist und durch die im Problem auftretenden Terme erzeugt wird. Eine Aussage der Form $\forall \mathbf{x}(\phi(\mathbf{x}) \mathrel{|\!\sim} \psi(\mathbf{x}))$ wird also durch eine endliche Menge von Aussagen

$$\phi(\mathbf{t_i}) \mathrel{|\!\sim} \psi(\mathbf{t_i}), \quad \text{i=1, ... n},$$

wobei die $\mathbf{t_i}$ neu eingeführte Aussagenkonstanten sind, dargestellt. Dies ist auch mit der Darstellungsweise der Reiterschen Defaults verträglich.

Wie bereits in Abschnitt 5.3.3 erwähnt, antworten der rationale und der präferentielle Abschluß fast immer ja. Einzig der rationale Abschluß mit der modifizierten Anfrage vermeidet die Inkonsistenz. Wir betrachten daher nur diesen Fall.

II. Übliche Formalisierung: Diese Formalisierung (siehe auch Kapitel 4) ist nicht so aufwendig wie die erste. Hier wird kein konzeptioneller Unterschied zwischen Prädikaten und deren Instanzen gemacht. Diese Formalisierung entspricht der in den beiden Artikeln [LM92] und [KLM90] angegebenen. Allerdings ist ein Nachteil, daß auch sicheres Wissen $\alpha \rightarrow \beta$ als $\alpha \mathrel{|\!\sim} \beta$ kodiert werden muß. Wir untersuchen daher auch die Möglichkeit, zwischen sicherem und unsicherem Wissen zu unterscheiden.

hart vs. weich: $\mathcal{K}$ wird in *harte* und *weiche* Behauptungen aufgespalten (siehe auch Abschnitt 5.3.1, Möglichkeit 2.): $\mathcal{K} = \mathcal{H} \cup \mathcal{W}$. Hier ergeben sich zwei Unterfälle:

mod. Alg. wir wenden den modifizierten Algorithmus zur Berechnung von $\mathcal{K}^{\mathbf{pref}}$ und von $\mathcal{K}^{\mathbf{rat}}$ (also `rat_hart` und `pref_hart`, siehe Abschnitt 5.3.2) an, oder

mod. Anf. die Anfrage wird modifiziert (siehe Abschnitt 5.3.1, Möglichkeit 4.). Anstatt "$\alpha \mathrel{|\!\sim} \beta$" betrachten wir die Anfrage "$(\alpha \wedge \Sigma_{\mathbf{s}}) \mathrel{|\!\sim} \beta$". Hierbei steht $\Sigma_{\mathbf{s}}$ für die sicheren (*harten*) Fakten. In der Wissensbasis tauchen nur *weiche* Aussagen auf. Für den präferentiellen Ansatz erhalten wir hier dasselbe, wie bei der gerade erwähnten Unterscheidung von hartem und weichem Wissen (dies folgt aus den in [KLM90] enthaltenen Vollständigkeitsresultaten). Daher prüfen wir nur `rat`.

Beispiel 5.4.1 (spezifischere Defaults)

1. *Pinguine sind Vögel.*
2. *Pinguine fliegen normalerweise nicht.*
3. *Vögel fliegen normalerweise.*
4. *Tweety ist ein Vogel, Fred ist ein Pinguin.*

Intuitiv möchten wir gerne, daß die Aussage "Pinguine fliegen normalerweise" nicht folgerbar ist. Insbesondere soll zwar "Tweety fliegt", aber auch "Fred fliegt nicht" gefolgert werden können.

I. Präd. Formalisierung: Wir führen Konstanten $\mathbf{P_{fred}}$, $\mathbf{V_{fred}}$, $\mathbf{P_{tweety}}$, $\mathbf{V_{tweety}}$, $\mathrm{F_{\mathbf{fred}}}$, $\mathrm{F_{\mathbf{tweety}}}$ ein. Defaults werden dargestellt, indem man alle Instanzen einsetzt.

Wegen der Inkonsistenz betrachten wir nur den rationalen Abschluß und die modifizierte Anfrage

$\mathcal{K}'$: $\mathcal{K}' = \{$`P_{fred}` $\mid\!\sim$ `-F_{fred}`, `P_{tweety}` $\mid\!\sim$ `-F_{tweety}`,
`V_{fred}` $\mid\!\sim$ `F_{fred}`, `V_{tweety}` $\mid\!\sim$ `F_{tweety}`$\}$

?-: `((P_{tweety} => V_{tweety}) & (P_{fred} => V_{fred}))`
`& V_{tweety} & P_{fred})` $\mid\!\sim$ `(F_{tweety})`,

`((P_{tweety} => V_{tweety}) & (P_{fred} = P_{fred}))`
`& V_{tweety} & P_{fred})` $\mid\!\sim$ `(-F_{fred})`

```
?- rat([[pinguin_fred,-fliegt_fred],
        [pinguin_tweety,-fliegt_tweety],
        [vogel_fred,fliegt_fred],
        [vogel_tweety,fliegt_tweety]],
       [(pinguin_tweety => vogel_tweety) &
        (pinguin_fred => vogel_fred) &
         vogel_tweety &  pinguin_fred, fliegt_tweety]).
 Ja, Rang der Anfrage bez. K = 0;

?- rat([[pinguin_fred,-fliegt_fred],
        [pinguin_tweety,-fliegt_tweety],
        [vogel_fred,fliegt_fred],
        [vogel_tweety,fliegt_tweety]],
       [(pinguin_tweety => vogel_tweety) &
        (pinguin_fred => pinguin_fred) &
         vogel_tweety &  pinguin_fred, -fliegt_fred]).
 Ja, Rang der Anfrage bez. K = 0;
```

II. Übliche Formalisierung:

$\mathcal{K}$: `pinguin` $\mid\!\sim$ `vogel`, `pinguin` $\mid\!\sim$ `-fliegt`, `vogel` $\mid\!\sim$ `fliegt`,
`tweety` $\mid\!\sim$ `vogel`, `fred` $\mid\!\sim$ `pinguin`,

?-: `pinguin` $\mid\!\sim$ `fliegt`, `tweety` $\mid\!\sim$ `fliegt`, `fred` $\mid\!\sim$ `-fliegt`

```
?- pref([[pinguin,vogel],[pinguin,-fliegt],[vogel,fliegt],
         [tweety,vogel],[fred,pinguin]],[pinguin,fliegt]).
 Nein, Rang der Anfrage bez. K = 1;

?- pref([..],[tweety,fliegt]).
 Nein, Rang der Anfrage bez. K = 1;
```

```
?- pref([..],[fred,-fliegt]).
 Nein, Rang der Anfrage bez. K = 2;


?- rat([...],[pinguin,fliegt]).
 Nein, Rang der Anfrage bez. K = 1;

?- rat([..],[tweety,fliegt]).
 Ja, Rang der Anfrage bez. K = 0;

?- rat([..],[fred,-fliegt]).
 Ja,  Rang der Anfrage bez. K = 1;
```

hart vs. weich: $\mathcal{K}$ wird in *harte* und *weiche* Behauptungen aufgespalten: $\mathcal{K} = \mathcal{H} \cup \mathcal{W}$.

$\mathcal{W}$: `vogel` $\mid\!\sim$ `fliegt`, `pinguin` $\mid\!\sim$ `-fliegt`

$\mathcal{H}$: `pinguin` $\mid\!\sim$ `vogel`, `tweety` $\mid\!\sim$ `vogel`, `fred` $\mid\!\sim$ `pinguin`

- *modifizierter Algorithmus:*

  ?-: `tweety` $\mid\!\sim$ `fliegt`, `fred` $\mid\!\sim$ `-fliegt`,

  ```
  ?- pref_hart([[vogel,fliegt],[pinguin,-fliegt]],
               [[pinguin,vogel],[tweety,vogel],
                [fred,pinguin]],
               [tweety,fliegt]).
   Nein, Rang der Anfrage bez. K = 0;

  ?- pref_hart([...],[...],[fred,-fliegt]).
   Nein, Rang der Anfrage bez. K = 0;


  ?- rat_hart([...],[...],[tweety,fliegt]).
   Ja, Rang der Anfrage bez. K = 0;

  ?- rat_hart([...],[...],[fred,-fliegt]).
   Ja, Rang der Anfrage bez. K = 0;
  ```

- *modifizierte Anfrage:*

  $\mathcal{K}'$: $\mathcal{K}' = \mathcal{W}$

  ?-: `tweety & (pinguin =>  vogel) & (tweety =>  vogel)`
  `& (fred =>  pinguin)` $\mid\!\sim$ `fliegt`,

  ?-: `fred & (pinguin =>  vogel) & (tweety =>  vogel)`
  `& (fred =>  pinguin)` $\mid\!\sim$ `-fliegt`,

```
?- rat([[vogel,fliegt],[pinguin,-fliegt]],
       [tweety & (pinguin =>  vogel) & (tweety =>  vogel)
               & (fred =>  pinguin), fliegt]).
 Ja, Rang der Anfrage bez. K = 0;

?- rat([[vogel,fliegt],[pinguin,-fliegt]],
       [fred & (pinguin =>  vogel) & (tweety =>  vogel)
             & (fred =>  pinguin), -fliegt]).
 Nein, Rang der Anfrage bez. K = 1;
```

Beispiel 5.4.2 (Vermeiden von Ausnahmen)

1. *Pinguine sind Vögel.*

2. *Pinguine fliegen normalerweise nicht.*

3. *Vögel fliegen normalerweise.*

Angenommen, wir kennen ein Tier namens "Tweety". Sollen wir folgern, daß "Tweety" kein Pinguin ist? Ja.

II. Übliche Formalisierung:

$\mathcal{K}$: `pinguin` $\mid\!\sim$ `vogel`, `pinguin` $\mid\!\sim$ `-fliegt`, `vogel` $\mid\!\sim$ `fliegt`

?-: `tweety` $\mid\!\sim$ `-pinguin`, `tweety` $\mid\!\sim$ `fliegt`, `tweety` $\mid\!\sim$ `-fliegt`,

```
?- pref([[pinguin,vogel],[pinguin,-fliegt],[vogel,fliegt]],
                [tweety,-pinguin]).
 Nein, Rang der Anfrage bez. K = 1;

?- pref([..],[tweety,fliegt]).
 Nein, Rang der Anfrage bez. K = 0;

?- pref([..],[tweety,-fliegt]).
 Nein, Rang der Anfrage bez. K = 0;


?- rat([...],[tweety,-pinguin]).
 Ja, Rang der Anfrage bez. K = 0;

?- rat([..],[tweety,fliegt]).
 Nein, Rang der Anfrage bez. K = 0;

?- rat([..],[tweety,-fliegt]).
 Nein, Rang der Anfrage bez. K = 0;
```

hart vs. weich: $\mathcal{K}$ wird in *harte* und *weiche* Behauptungen aufgespalten: $\mathcal{K} = \mathcal{H} \cup \mathcal{W}$.

$\mathcal{W}$: `pinguin` $\mid\!\sim$ `-fliegt`, `vogel` $\mid\!\sim$ `fliegt`

$\mathcal{H}$: `pinguin` $\mid\!\sim$ `vogel`,

- *modifizierter Algorithmus:*

  ?-: `tweety` $\mid\!\sim$ `-pinguin`, `tweety` $\mid\!\sim$ `fliegt`, `tweety` $\mid\!\sim$ `-fliegt`,

```
?- pref_hart([[pinguin,-fliegt], [vogel, fliegt]],
             [[pinguin,vogel]],
             [tweety,-pinguin]).
  Nein, Rang der Anfrage bez. K = 0;

?- pref_hart([...],[...],   [tweety,fliegt]).
  Nein, Rang der Anfrage bez. K = 0;

?- pref_hart([...],[...],   [tweety,-fliegt]).
  Nein, Rang der Anfrage bez. K = 0;

?- rat_hart([...],[...], [tweety,-pinguin]).
  Ja, Rang der Anfrage bez. K = 0;

?- rat_hart([...],[...], [tweety,fliegt]).
  Nein, Rang der Anfrage bez. K = 0;

?- rat_hart([...],[...], [tweety,-fliegt]).
  Nein, Rang der Anfrage bez. K = 0;
```

- *modifizierte Anfrage:*

  $\mathcal{K}'$: $\mathcal{K}' = \mathcal{W}$

  ?-: `tweety & pinguin =>  vogel` $\mid\!\sim$ `-pinguin`,
  `tweety & pinguin =>  vogel` $\mid\!\sim$ `fliegt`,
  `tweety & pinguin =>  vogel` $\mid\!\sim$ `-fliegt`,

```
?- rat([[pinguin,-fliegt], [vogel, fliegt]],
       [tweety & (pinguin =>  vogel), -pinguin]).
 Ja, Rang der Anfrage bez. K = 0;

?- rat([[pinguin,-fliegt], [vogel, fliegt]],
       [tweety & (pinguin =>  vogel), fliegt]).
 Nein, Rang der Anfrage bez. K = 0;

?- rat([[pinguin,-fliegt], [vogel, fliegt]],
       [tweety & (pinguin =>  vogel), -fliegt]).
 Nein, Rang der Anfrage bez. K = 0;
```

Beispiel 5.4.3 (Auswirkung irrelevanter Information)

1. *Vögel setzen sich aus Pinguinen oder Kolibris oder Kanarienvögel zusammen.*
2. *Vögel fliegen normalerweise.*
3. *Vögel haben normalerweise die Eigenschaft E_1.*
4. *Pinguine fliegen normalerweise nicht.*
5. *Kolibris haben normalerweise nicht die Eigenschaft E_1.*

Angenommen, wir wissen, daß Tweety ein Vogel ist. Wir können schließen, daß Tweety ein Kanarienvogel ist (da Tweety sonst eine Ausnahme wäre) und damit auch "Tweety fliegt".

Fügen wir aber die irrelevante Information, daß auch Kanarienvögel Ausnahmen bezüglich einer weiteren Eigenschaft E_2 sind, so können wir "Tweety fliegt" in Circumscription oder Default-Logik nicht mehr folgern.

II. Übliche Formalisierung:

$\mathcal{K}$: `vogel` $\mid\!\sim$ `(pinguin v kolibri v canary)`,
`(pinguin v kolibri v canary)` $\mid\!\sim$ `vogel`,
`vogel` $\mid\!\sim$ `fliegt`, `vogel` $\mid\!\sim$ `e1`,
`pinguin` $\mid\!\sim$ `-fliegt`, `kolibri` $\mid\!\sim$ `-e1`,

?-: `tweety` $\mid\!\sim$ `canary`, `tweety` $\mid\!\sim$ `fliegt`

```
?- pref([[vogel, pinguin v kolibri v canary],[vogel,fliegt],
        [pinguin v kolibri v canary,vogel],[vogel,e1],
        [pinguin,-fliegt],[kolibri,-e1]],
       [tweety,fliegt]).
 Nein, Rang der Anfrage bez. K = 0;

?- pref([...],[tweety,canary]).
 Nein, Rang der Anfrage bez. K = 0;

?- rat([...],[tweety,fliegt]).
 Nein, Rang der Anfrage bez. K = 0;

?- rat([...],[tweety,canary]).
 Nein, Rang der Anfrage bez. K = 0;
```

$\mathcal{K}'$: Da sich schon für $\mathcal{K}$ nicht die erwarteten Antworten ergeben haben, erübrigt es sich, Noch `vogel` $\mid\!\sim$ `e2` und `canary` $\mid\!\sim$ `-e2` hinzuzufügen.

hart vs. weich: $\mathcal{K}$ wird in *harte* und *weiche* Behauptungen aufgespalten:
$\mathcal{K} = \mathcal{H} \cup \mathcal{W}$.

$\mathcal{W}$: `vogel` $\mid\!\sim$ `fliegt`, `vogel` $\mid\!\sim$ `e1`,
`pinguin` $\mid\!\sim$ `-fliegt`, `kolibri` $\mid\!\sim$ `-e1`

$\mathcal{H}$: `vogel` $\mid\!\sim$ `(pinguin v kolibri v  canary)`,
`(pinguin v kolibri v canary)` $\mid\!\sim$ `vogel`

- *modifizierter Algorithmus:*

  ?-: `tweety` $\mid\!\sim$ `canary`, `tweety` $\mid\!\sim$ `fliegt`

```
?- pref_hart([[vogel,fliegt],[vogel,e1],
              [pinguin,-fliegt],[kolibri,-e1]],
             [[vogel, pinguin v kolibri v canary],
              [pinguin v kolibri v canary,vogel]],
             [tweety,canary]).
   Nein, Rang der Anfrage bez. K = 0;

?- pref_hart([...],[...],[tweety,fliegt])
   Nein, Rang der Anfrage bez. K = 0;


?- rat_hart([...],[...],[tweety,canary])
   Nein, Rang der Anfrage bez. K = 0;

?- rat_hart([...],[...],[tweety,fliegt])
   Nein, Rang der Anfrage bez. K = 0;
```

  $\mathcal{K}'$: Da sich schon für $\mathcal{K}$ nicht die erwarteten Antworten ergeben haben, erübrigt es sich, noch `vogel` $\mid\!\sim$ `e2` und `canary` $\mid\!\sim$ `-e2` hinzuzufügen.

- *modifizierte Anfrage:*

  $\mathcal{K}'$: $\mathcal{K}' = \mathcal{W}$

  ?-: `tweety & vogel <=> (pinguin v kolibri v canary)` $\mid\!\sim$ `canary`,
  `tweety & vogel <=> (pinguin v kolibri v canary)` $\mid\!\sim$ `fliegt`

```
?- rat([[vogel, pinguin v kolibri v canary],[vogel,e1],
         [pinguin v kolibri v canary,vogel],[vogel,fliegt],
         [pinguin,-fliegt],[kolibri,-e1],[vogel,e2],
         [canary,-e2],[vogel,e2],[canary,-e2]],
        [(vogel => (pinguin v kolibri v canary)) & tweety &
         ((pinguin v kolibri v canary) => vogel),canary]).
 Nein, Rang der Anfrage bez. K = 0;

?- rat([...]
        [(vogel => (pinguin v kolibri v canary)) & tweety &
         ((pinguin v kolibri v canary) => vogel),fliegt]).
 Nein, Rang der Anfrage bez. K = 0;
```

Beispiel 5.4.4 (Disjunktion)

1. *Pinguine sind Vögel.*
2. *Pinguine fliegen normalerweise nicht.*
3. *Vögel fliegen normalerweise.*
4. *Tweety ist ein Pinguin oder Fred ist ein Pinguin.*

Intuitiv möchten wir gerne, daß die Aussage "Tweety und Fred fliegen" nicht folgerbar ist.

II. Übliche Formalisierung:

$\mathcal{K}$: `pinguin` $\mid\!\sim$ `vogel`, `pinguin` $\mid\!\sim$ `-fliegt`, `vogel` $\mid\!\sim$ `fliegt`,
`tweety v fred` $\mid\!\sim$ `pinguin`

?-: `tweety & fred` $\mid\!\sim$ `fliegt`, `tweety` $\mid\!\sim$ `fliegt`, `tweety` $\mid\!\sim$ `-fliegt`

```
?- pref([[pinguin,vogel],[pinguin,-fliegt],[vogel,fliegt],
         [tweety v fred,pinguin]],
        [tweety & fred,fliegt]).
 Nein, Rang der Anfrage bez. K = 1;

?- pref([..],[tweety,fliegt]).
 Nein, Rang der Anfrage bez. K = 1;


?- pref([..],[tweety,-fliegt]).
 Nein, Rang der Anfrage bez. K = 2;

?- rat([...],[tweety & fred,fliegt]).
 Nein, Rang der Anfrage bez. K = 1;

?- rat([..],[tweety,fliegt]).
 Nein, Rang der Anfrage bez. K = 1;


?- rat([..],[tweety,-fliegt]).
 Ja, Rang der Anfrage bez. K = 1;


?- rat([[pinguin,vogel],[pinguin,-fliegt],[vogel,fliegt],
        [tweety v fred,pinguin]],[tweety & fred,-fliegt]).
 Ja, Rang der Anfrage bez. K = 1;
```

hart vs. weich: $\mathcal{K}$ wird in *harte* und *weiche* Behauptungen aufgespalten: $\mathcal{K} = \mathcal{H} \cup \mathcal{W}$.

$\mathcal{W}$: `pinguin` $\mid\!\sim$ `-fliegt`, `vogel` $\mid\!\sim$ `fliegt`,

$\mathcal{H}$: `pinguin` $\mid\!\sim$ `vogel`, `tweety v fred` $\mid\!\sim$ `pinguin`

- *modifizierter Algorithmus:*

  ?-: `tweety & fred` $\mid\!\sim$ `fliegt`, `tweety` $\mid\!\sim$ `fliegt`

```
?- pref_hart([[pinguin,-fliegt],[vogel,fliegt]],
             [[pinguin,vogel],[tweety v fred,pinguin]],
             [tweety & fred,fliegt]).
 Nein, Rang der Anfrage bez. K = 0;

?- rat_hart([...],[...],[tweety & fred,fliegt]).
 Nein, Rang der Anfrage bez. K = 0;

?- rat_hart([...],[...],[tweety ,fliegt]).
 Nein, Rang der Anfrage bez. K = 1;
```

- *modifizierte Anfrage:*

  $\mathcal{K}'$: $\mathcal{K}' = \mathcal{W}$

  ?-: `tweety & fred & pinguin => vogel &`
  `(tweety v fred) => pinguin` $\mid\!\sim$ `fliegt`

```
?- rat([[pinguin,-fliegt],[vogel,fliegt]],
      [  (tweety & fred) & (pinguin =>  vogel)
       & ((tweety v fred) =>  pinguin),fliegt]).

 Nein, Rang der Anfrage bez. K = 1;
```

Beispiel 5.4.5 (Kontraposition,5)

Gegeben sei die Aussage "Wenn α dann normalerweise β".
Sollen wir daraus "Wenn $\neg\beta$ dann normalerweise $\neg\alpha$" folgern können?

II. Übliche Formalisierung:

$\mathcal{K}$: `a` $\mid\!\sim$ `b`

?-: `-b` $\mid\!\sim$ `-a`

```
?- pref([[a,b]],[-b,-a]).
 Nein, Rang der Anfrage bez. K = 1;

?- rat([[a,b]],[-b,-a]).
 Ja, Rang der Anfrage bez. K = 0;
```

Beispiel 5.4.6 (Lifschitz, A1)

1. *A und B sind schwere Blöcke,*
2. *Schwere Blöcke sind normalerweise auf dem Tisch.*
3. *A ist nicht auf dem Tisch.*

Ist B auf dem Tisch? Wir erwarten die Antwort "Ja".

I. Präd. Formalisierung: `ha, hb` bedeuten, daß A bzw. B, schwer (heavy) sind. `ta,tb` bedeuten, daß A bzw. B, auf dem Tisch sind. Wegen der Inkonsistenz betrachten wir nur den rationalen Abschluß und die modifizierte Anfrage

$\mathcal{K}'$: $\mathcal{K}' = \mathtt{ha} \mathrel{|\!\sim} \mathtt{ta}, \mathtt{hb} \mathrel{|\!\sim} \mathtt{tb}$

?-: $(\mathtt{ha}\ \&\ \mathtt{hb}\ \&\ \mathtt{-ta}) \mathrel{|\!\sim} \mathtt{tb}$

```
?- rat([[ha,ta],[hb,tb]],
       [ha & hb & -ta,tb]).

 Nein, Rang der Anfrage bez. K = 1;
```

II. Übliche Formalisierung: `a`, `b` bedeuten A, B sind Blöcke. `heavy` bedeutet "schwer sein" und `table` bedeutet "auf dem Tisch sein".

$\mathcal{K}$: $\mathtt{a} \mathrel{|\!\sim} \mathtt{heavy}$, $\mathtt{b} \mathrel{|\!\sim} \mathtt{heavy}$, $\mathtt{heavy} \mathrel{|\!\sim} \mathtt{table}$, $\mathtt{a} \mathrel{|\!\sim} \mathtt{-table}$,

?-: $\mathtt{b} \mathrel{|\!\sim} \mathtt{table}$, $\mathtt{a} \mathrel{|\!\sim} \mathtt{-b}$

```
?- pref([[a,heavy],[b,heavy],[heavy,table],[a,-table]],
        [b,table]).
 Nein, Rang der Anfrage bez. K  = 1;


?- pref([[a,heavy],[b,heavy],[heavy,table],[a,-table]],
        [a,-b]).
 Nein, Rang der Anfrage bez. K  = 1;


?- rat([[a,heavy],[b,heavy],[heavy,table],[a,-table]],
       [b,table]).
 Ja, Anfrage hat keinen Rang, n = 0;

?- rat([[a,heavy],[b,heavy],[heavy,table],[a,-table]],
       [a,-b]).
 Nein, Rang der Anfrage bez. K  = 1;
```

hart vs. weich: $\mathcal{K}$ wird in *harte* und *weiche* Behauptungen aufgespalten: $\mathcal{K} = \mathcal{H} \cup \mathcal{W}$.

$\mathcal{W}$: heavy $\mid\!\sim$ table,

$\mathcal{H}$: a $\mid\!\sim$ heavy, b $\mid\!\sim$ heavy, a $\mid\!\sim$ -table

- *modifizierter Algorithmus:*

  ?-: b $\mid\!\sim$ table

```
?- pref_hart([[heavy,table]],
             [[a,heavy],[b,heavy],[a,-table]],
             [b,table]).
 Nein, Rang der Anfrage bez. K  = 0;

?- rat_hart([...],[...],
            [b,table]).
 Ja, Rang der Anfrage bez. K  = 0;

?- rat_hart([[heavy,table]],
            [[a,heavy],[b,heavy],[a,-table]],
            [a,-b]).
 Nein, Rang der Anfrage bez. K  = 0;
```

- *modifizierte Anfrage:*

  $\mathcal{K}'$: $\mathcal{K}' = \mathcal{W}$

  ?-: (b & a => heavy & b => heavy & a => -table) $\mid\!\sim$ table

```
?- rat([[heavy,table]],
       [b & (a =>  heavy) & (b =>  heavy)
          & (a =>  -table),table]).

 Ja, Rang der Anfrage bez. K  = 0;
```

Beispiel 5.4.7 (Lifschitz, A2)

1. *A und B sind schwere Blöcke,*
2. *Schwere Blöcke sind normalerweise auf dem Tisch.*
3. *A ist nicht auf dem Tisch.*
4. *B ist rot.*

Ist B ist auf dem Tisch? Wir erwarten die Antwort "ja".

I. Präd. Formalisierung: `ha`, `hb` bedeuten, daß A bzw. B, heavy sind. `ta,tb` bedeuten, daß A bzw. B, auf dem table sind. `rb` bedeutet, daß B rot ist.

Wegen der Inkonsistenz betrachten wir nur den rationalen Abschluß und die modifizierte Anfrage

$\mathcal{K}'$: $\mathcal{K}' =$ ha $\mid\!\sim$ ta, hb $\mid\!\sim$ tb

?-: `(ha & hb & -ta & rb)` $\mid\!\sim$ `tb`

```
?- rat([[ha,ta],[hb,tb]],
       [ha & hb & -ta & rb,tb]).

 Nein, Rang der Anfrage bez. K = 1;
```

II. Übliche Formalisierung: `a`, `b` bedeuten A, B sind Blöcke. `heavy` bedeutet "schwer sein", `table` bedeutet "auf dem Tisch sein" und `red` bedeutet "rot sein".

$\mathcal{K}$: `a` $\mid\!\sim$ `heavy`, `b` $\mid\!\sim$ `heavy`, `heavy` $\mid\!\sim$ `table`, `a` $\mid\!\sim$ `-table`, `b` $\mid\!\sim$ `red`,

?-: `b` $\mid\!\sim$ `table`

```
?- pref([[a,heavy],[b,heavy],[heavy,table],[a,-table],[b,red]],
        [b,table]).

 Nein, Rang der Anfrage bez. K  = 1;

?- rat([[a,heavy],[b,heavy],[heavy,table],[a,-table],[b,red]],
       [b,table]).

 Ja, Anfrage hat keinen Rang, n = 0;
```

hart vs. weich: $\mathcal{K}$ wird in *harte* und *weiche* Behauptungen aufgespalten: $\mathcal{K} = \mathcal{H} \cup \mathcal{W}$.

$\mathcal{W}$: `heavy` $\mid\!\sim$ `table`,

$\mathcal{H}$: `a` $\mid\!\sim$ `heavy`, `b` $\mid\!\sim$ `heavy`, `a` $\mid\!\sim$ `-table`, `b` $\mid\!\sim$ `red`

- *modifizierter Algorithmus:*

  ?-: `b` $\mid\!\sim$ `table`

  ```
  ?- pref_hart([[heavy,table]],
               [[a,heavy],[b,heavy],[a,-table],[b,red]],
               [b,table]).
   Nein, Rang der Anfrage bez. K  = 0;

  ?- rat_hart([...],[...],
              [b,table]).
   Ja, Rang der Anfrage bez. K = 0;
  ```

- *modifizierte Anfrage:*

  $\mathcal{K}'$: $\mathcal{K}' = \mathcal{W}$

  ?-: `(b & a =>  heavy  & b =>  heavy &  a => -table) &`
  `b =>  red)` $\mid\!\sim$ `table`

```
?- rat([[heavy,table]],
        [b & (a =>  heavy) & (b =>  heavy) & (a =>  -table)
           & (b =>  red), table]).
 Ja, Rang der Anfrage bez. K  = 0;
```

Beispiel 5.4.8 (Lifschitz, A3)

1. *A und B sind schwere Blöcke,*
2. *Schwere Blöcke sind normalerweise auf dem Tisch.*
3. *A ist nicht auf dem Tisch.*
4. *Schwere Blöcke sind normalerweise rot.*
5. *B ist nicht rot.*

Ist B auf dem Tisch und ist A rot?

I. Präd. Formalisierung: `ha`, `hb` bedeuten, daß A bzw. B, schwer sind. `ta,tb` bedeuten, daß A bzw. B, auf dem Tisch sind. `ra`, `rb` bedeuten, daß A, B rot sind. Wegen der Inkonsistenz betrachten wir nur den rationalen Abschluß und die modifizierte Anfrage

$\mathcal{K}'$: $\mathcal{K}' = \mathtt{ha} \mathrel{|\!\sim} \mathtt{ta}, \mathtt{hb} \mathrel{|\!\sim} \mathtt{tb}, \mathtt{ha} \mathrel{|\!\sim} \mathtt{ra}, \mathtt{hb} \mathrel{|\!\sim} \mathtt{rb}$

?-: $(\mathtt{ha\ \&\ hb\ \&\ -ta\ \&\ -rb}) \mathrel{|\!\sim} \mathtt{tb}$, $(\mathtt{ha\ \&\ hb\ \&\ -ta\ \&\ -rb}) \mathrel{|\!\sim} \mathtt{ra}$

```
?- rat([[ha,ta],[hb,tb],[ha,ra],[hb,rb]],
       [ha & hb & -ta & -rb,tb]).
 Nein, Rang der Anfrage bez. K = 1;

?- rat([[ha,ta],[hb,tb]],
       [ha & hb & -ta & -rb,ra]).
  Nein, Rang der Anfrage bez. K = 1;
```

II. Übliche Formalisierung: `a`, `b` bedeuten A, B sind Blöcke. `heavy` bedeutet "schwer sein", `table` bedeutet "auf dem Tisch sein" und `red` bedeutet "rot sein"

$\mathcal{K}$: $\mathtt{a} \mathrel{|\!\sim} \mathtt{heavy}$, $\mathtt{b} \mathrel{|\!\sim} \mathtt{heavy}$, $\mathtt{heavy} \mathrel{|\!\sim} \mathtt{table}$, $\mathtt{a} \mathrel{|\!\sim} \mathtt{-table}$, $\mathtt{heavy} \mathrel{|\!\sim} \mathtt{red}$, $\mathtt{b} \mathrel{|\!\sim} \mathtt{-red}$

?-: $\mathtt{b} \mathrel{|\!\sim} \mathtt{table}$, $\mathtt{a} \mathrel{|\!\sim} \mathtt{red}$

```
?- pref([[a,heavy],[b,heavy],[heavy,table],[a,-table],
         [heavy,red],[b,-red]],[b,table]).
 Nein, Rang der Anfrage bez. K  = 1;

?- pref([...],[a,red]).
```

```
 Nein, Rang der Anfrage bez. K  = 1;

?- rat([...],[b,table]).
 Nein, Rang der Anfrage bez. K  = 1;


?- rat([...],[a,red]).
 Nein, Rang der Anfrage bez. K  = 1;
```

hart vs. weich: $\mathcal{K}$ wird in *harte* und *weiche* Behauptungen aufgespalten: $\mathcal{K} = \mathcal{H} \cup \mathcal{W}$.

$\mathcal{W}$: heavy $\mid\!\sim$ table, heavy $\mid\!\sim$ red

$\mathcal{H}$: a $\mid\!\sim$ heavy, b $\mid\!\sim$ heavy, a $\mid\!\sim$ -table, b $\mid\!\sim$ -red

- *modifizierter Algorithmus:*

  ?-: b $\mid\!\sim$ table, a $\mid\!\sim$ red

```
?- pref_hart([[heavy,table],[heavy,red]],
             [[a,heavy],[b,heavy],[a,-table],[b,-red]],
             [b,table]).
 Nein, Rang der Anfrage bez. K  = 0;

?- pref_hart([...],[...],[a,red]).
 Nein, Rang der Anfrage bez. K  = 0;

?- rat_hart([...],[...],[b,table]).
 Nein, Rang der Anfrage bez. K  = 0;

?- rat_hart([...],[...],[a,red]).
 Nein, Rang der Anfrage bez. K  = 0;
```

- *modifizierte Anfrage:*

  $\mathcal{K}'$: $\mathcal{K}' = \mathcal{W}$

  ?-: (b & a => heavy & b => heavy & a => -table) $\mid\!\sim$ table,
  (a & a => heavy & b => heavy & a => -table) $\mid\!\sim$ red

```
?- rat([[heavy,table],[heavy,red]],
       [b & (a => heavy) & (b => heavy)
          & (a => -table) & (b => -red), table]).
 Nein, Rang der Anfrage bez. K = 1;

?- rat([[heavy,table],[heavy,red]],
       [a & (a => heavy) & (b => heavy)
          & (a => -table) & (b => -red), red]).
 Nein, Rang der Anfrage bez. K = 1;
```

Beispiel 5.4.9 (Lifschitz, A6)

1. *A, B und C sind schwere Blöcke,*
2. *Schwere Blöcke sind normalerweise auf dem Tisch.*
3. *Wenigstens einer der Blöcke A oder B ist nicht auf dem Tisch.*

Genau einer der Blöcke A, B ist nicht auf dem Tisch.

I. Präd. Formalisierung: `ha, hb, hc` bedeuten, daß A, B bzw. C schwer sind. `ta, tb, tc` bedeuten, daß A, B bzw. C auf dem Tisch sind. Wegen der Inkonsistenz betrachten wir nur den rationalen Abschluß und die modifizierte Anfrage

$\mathcal{K}'$: $\mathcal{K}' = \mathtt{ha} \mathrel{|\!\sim} \mathtt{ta}, \mathtt{hb} \mathrel{|\!\sim} \mathtt{tb}, \mathtt{hc} \mathrel{|\!\sim} \mathtt{tc}$

?-: `(-ta v -tb)` $\mathrel{|\!\sim}$ `((ta & -tb) v (tb & -ta)`

```
?- rat([[ha,ta],[hb,tb],[hc,tc]],
       [-ta v -tb,(ta & -tb) v (tb & -ta)]).
 Nein, Rang der Anfrage bez. K = 0;
```

II. Übliche Formalisierung: `a`, `b`, `c` bedeuten A, B und C sind Blöcke. `heavy` bedeutet "schwer sein" und `table` bedeutet "auf dem Tisch sein".

$\mathcal{K}$: `a` $\mathrel{|\!\sim}$ `heavy`, `b` $\mathrel{|\!\sim}$ `heavy`, `c` $\mathrel{|\!\sim}$ `heavy`, `heavy` $\mathrel{|\!\sim}$ `table`, `(a v b)` $\mathrel{|\!\sim}$ `-table`,

?-: `(a & -b) v (-a & b)` $\mathrel{|\!\sim}$ `-table`

```
?- pref([[a,heavy],[b,heavy],[c,heavy],[heavy,table],
          [a v b,-table]],
         [(a & -b) v (-a & b),-table]).
 Nein, Rang der Anfrage bez. K  = 2;

?- rat([[a,heavy],[b,heavy],[c,heavy],[heavy,table],
         [a v b,-table]],
        [(a & -b) v (-a & b),-table]).
 Ja, Rang der Anfrage bez. K = 1;
```

hart vs. weich: $\mathcal{K}$ wird in *harte* und *weiche* Behauptungen aufgespalten: $\mathcal{K} = \mathcal{H} \cup \mathcal{W}$.

$\mathcal{W}$: `heavy` $\mathrel{|\!\sim}$ `table`,

$\mathcal{H}$: `a` $\mathrel{|\!\sim}$ `heavy`, `b` $\mathrel{|\!\sim}$ `heavy`, `c` $\mathrel{|\!\sim}$ `heavy`, `a v b` $\mathrel{|\!\sim}$ `-table`

- *modifizierter Algorithmus:*

  ?-: `(a & -b) v (-a & b)` $\mathrel{|\!\sim}$ `-table`

```
?- pref_hart([[heavy,table]],
             [[a,heavy],[b,heavy],[c,heavy],
              [a v b,-table]],
             [(a & -b) v (-a & b),-table]).
 Ja, Anfrage hat keinen Rang, n = 2

?- rat_hart([...],[...],[(a & -b) v (-a & b),-table]).
 Ja, Anfrage hat keinen Rang, n = 2
```

- *modifizierte Anfrage:*

  $\mathcal{K}'$: $\mathcal{K}' = \mathcal{W}$

  ?-: `((a & -b) v (-a & b) & a=>heavy & b=>heavy & a=>-table)` $\mid\!\sim$ `-table`

```
?- rat([[heavy,table]],
       [((a & -b) v (-a & b)) & (a =>  heavy)
         & (b =>  heavy) & (c =>  heavy)
         & ((a v b) =>  -table), -table]).
 Ja, Rang der Anfrage bez. K  = 1;
```

5.4.3 Fazit

Bei einigen der Beispiele aus Abschnitt 5.4.2 kann man über die zugrundeliegende Intuition und die "richtigen" Antworten streiten. In der folgenden Tabelle haben wir die Beispiele zusammengestellt, von denen wir glauben, daß sie eindeutig beantwortet werden können. Die Einträge "ja" bzw. "nein" sagen daher aus, ob der jeweilige Formalismus mit unserer Intuition übereinstimmt. Die Tabelle behandelt nur die "übliche" Formalisierung, also die Möglichkeit II.

Wir fassen die wichtigsten Beobachtungen kurz zusammen:

I. Präd. Formalisierung: In allen betrachteten Beispielen war $\widetilde{\mathcal{K}}$ sowohl für $\mathcal{K}^{\mathbf{rat}}$ als auch für $\mathcal{K}^{\mathbf{pref}}$ inkonsistent. Dies ist sehr unbefriedigend, da jede Anfrage trivialerweise mit "Ja" beantwortet wird.

Die modifizierte Anfrage löst zwar im Falle von $\mathcal{K}^{\mathbf{rat}}$ diese Inkonsistenz, führt jedoch nur in einem Fall (Beispiel 5.4.1) zu dem richtigen Ergebnis.

II. Übliche Formalisierung: Hier zeigt sich, daß der präferentielle Abschluß in keinem Beispiel die intendierten Ergebnisse lieferte. Nur in Beispiel 5.4.9 konnte wenigstens `pref_hart` das Gewünschte liefern. Außer in Beispiel 5.4.4 ergab der rationale Abschluß die richtigen Aussagen.

Überdies stimmten die Antworten (bezüglich $\mathcal{K}^{\mathbf{rat}}$) auf die modifizierte Anfrage fast immer (außer in Beispiel 5.4.1) mit denen für die übliche Anfrage überein.

In keinem Fall war `rat_hart` dem normalen `rat` überlegen.

Beispiel	pref	pref_hart	rat	rat_hart	mod. Anfr.
Bsp. 5.4.6, Lif., A1	nein	nein	ja	ja	ja
Bsp. 5.4.7, Lif., A2	nein	nein	ja	ja	ja
Bsp. 5.4.9, Lif., A6	nein	ja	ja	ja	ja
Bsp. 5.4.1, spez. Def.	nein	nein	ja	ja	nein
Bsp. 5.4.2, Vermeiden	nein	nein	ja	ja	ja
Bsp. 5.4.4, Disjunktion	nein	nein	nein	nein	nein

Tabelle 5.1: Vergleich von $\mathcal{K}^{\mathbf{rat}}$ und $\mathcal{K}^{\mathbf{pref}}$

Die Darstellung harter Fakten α als $\top \mathrel{|\!\sim} \alpha$ (z.B. $\top \mathrel{|\!\sim} (\alpha \to \beta)$ anstatt $\alpha \mathrel{|\!\sim} \beta$) war für den rationalen Abschluß, wie erwartet, in jedem Beispiel zu schwach — wir haben daher die entsprechenden Programmaufrufe nicht aufgeführt.

Zeitplan

Abschnitte	**Dauer**	**Gesamt**
1.1	1 Std.	
1.2–1.3	3 Std.	
1.4–1.6	2 Std.	
Kapitel 1	6 Std.	2 Wochen
2.1	2 Std.	
2.2	1 Std.	
2.3	3 Std.	
2.4–2.6	3 Std.	
Kapitel 2	9 Std.	3 Wochen
3.1–3.2	2 Std.	
3.3	2 Std.	
3.4–3.6	2 Std.	
Kapitel 3	3 Std.	2 Wochen
4.1	2 Std.	
4.2	2 Std.	
4.3	3 Std.	
4.4	2 Std.	
4.5	2 Std.	
Kapitel 4	11 Std.	4 Wochen
5.1	1 Std.	
5.2	2 Std.	
5.3	2 Std.	
5.4	2 Std.	
Kapitel 5	7 Std.	2 Wochen

Literaturverzeichnis

[Avr87] A. Avron. Simple consequence relations. LFCS Report Series 87-30, Univ. of Edinburgh, 1987.

[BDK95] Gerd Brewka, Jürgen Dix, and Kurt Konolige. *Nonmonotonic Reasoning: An Overview.* CSLI Lecture Notes. Dikran, 1995. forthcoming.

[Bes88] Philippe Besnard. *An Introduction to Default Logic.* Springer, Berlin, 1988.

[BMM89] Philippe Besnard, Yves Moinard, and R.E. Mercer. The Importance of Open and Recursive Circumscription. *Artificial Intelligence*, 39(3), 1989.

[Bre91] Gerhard Brewka. *Nonmonotonic Reasoning: Logical Foundations of Commonsense*, volume 12 of *Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science.* Cambridge University Press, 1991.

[Bre92] Gerhard Brewka. Defaults as First Class Citizens: Yet Another Framework for Default Reasoning. Technical report, International Computer Science Institute Berkeley, 1992.

[Dix92] Jürgen Dix. Default Theories of Poole-Type and a Method for Constructing Cumulative Versions of Default Logic. In Bernd Neumann, editor, *Proceedings ECAI*, pages 289–293. John Wiley & Sons, 1992.

[Dix94] Jürgen Dix. Review on Marek/Truszscynski's Book "Nonmonotonic Logic“. *Bulletin of the IGPL*, Vol. 6, No. 1:250–254, 1994.

[dKK89] Johan de Kleer and Kurt Konolige. Eliminating the Fixed Predicates from a Circumscription. *Artificial Intelligence*, 39:391–398, 1989.

[DM92] Jürgen Dix and David Makinson. The Relationship between KLM and MAK models for Nonmonotonic Inference Operations. *Journal of Logic, Language and Information*, Volume 1, No. 2:131–140, 1992.

[DS93] Jürgen Dix and Peter Schmitt. Nichtmonotones Schließen: Wieviel Nichtmonotonie ist nötig? *Kognitionswissenschaft*, 3:53–69, 1993.

[DS95] Jürgen Dix and Peter Schmitt. Preferential and Rational Closure: A Comparative Study. In *Proceedings of the Colloquium Standardannahmen in Wissens- und Sprachverarbeitung, Bonn, April '92*, LNCS, Berlin, 1995. Springer. forthcoming.

[EMR85] David W. Etherington, R.E. Mercer, and Ray Reiter. On the Adequacy of Predicate Circumscription for Closed World Reasoning. *Computational Intelligence*, 1, 1985.

[FLM89] Michael Freund, Daniel Lehmann, and David Makinson. Canonical extensions to the infinite case of finitary nonmonotonic inference operations (Extended Abstract). In *Workshop on Nonmonotonic Reasoning*, December 1989.

[Fre91] Michael Freund. Supracompact Inference Operations. In J. Dix, K. P. Jantke, and P. H. Schmitt, editors, *Proceedings of the first Workshop on Nonmonotonic and Inductive Logic 1990 in Karlsruhe*, LNCS 543, pages 59–73, Berlin, October 1991. Springer.

[Gab84] Dov Gabbay. Theoretical Foundations for Non-Monotonic Reasoning in Expert- Systems. In K. Apt, editor, *Logics and Models of Concurrent Systems*, pages 439–458. Springer, Berlin, 1984.

[GC88] Dov Gabbay and M.R.B Clarke. An Intuitionistic Basis for Non-monotonic Reasoning. In P. Smets, E.H. Mamdani, D. Dubois, and H. Prade, editors, *Non-Standard Logics for Automated Reasoning.* Academic Press, 1988.

[KLM90] Sarit Kraus, Daniel Lehmann, and Menachem Magidor. Nonmonotonic Reasoning, Preferential Models and Cumulative Logics. *Artificial Intelligence*, 44(1):167–207, 1990.

[Lif86] Vladimir Lifschitz. On the Satisfiability of Circumscription. *Artificial Intelligence*, 28:17–27, 1986.

[LM92] Daniel Lehmann and Menachem Magidor. What does a conditional knowledge base entail? *Artificial Intelligence*, 55:1–60, 1992.

[Mak89] David Makinson. General Theory of Cumulative Inference. In Reinfrank, de Kleer, Ginsberg, and Sandewall, editors, *Non-Monotonic Reasoning*, LNAI 346, pages 1–18, Berlin, January 1989. Springer.

[Mak94] David Makinson. General Patterns in Nonmonotonic Reasoning. In D.M. Gabbay, C.J. Hogger, and J.A. Robinson, editors, *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming Vol. 2, Nonmonotonic and Uncertain Reasoning*, chapter 2.2, pages 35–110. Oxford University Press, 1994.

[Mot87] P. L. Mott. A theorem on the Consistency of Circumscription. *Artificial Intelligence*, 31:87–98, 1987.

[MT93] Viktor Marek and Mirek Truszczyński. *Nonmonotonic Logics; Context-Dependent Reasoning*. Springer, Berlin, 1st edition, 1993.

[PM86] D. Perlis and John Minker. Completeness Results for Circumscription. *Artificial Intelligence*, 28:29–42, 1986.

[Poo88] D. L. Poole. A Logical Framework for Default Reasoning. *Artificial Intelligence*, 36:27–47, 1988.

[Rab89] Arkady Rabinov. A Generalization of Collapsible Cases of Circumscription. *Artificial Intelligence*, 39, 1989.

[Sch90a] Karl Schlechta. Reasoning with and about defaults: Problems of Homogenousness and Independence. In *Proceedings of third International Workshop on Nonmonotonic Reasoning*, pages 209–222, March 1990.

[Sch90b] Karl Schlechta. Some results on classical preferential models. Technical report, IBM-Germany, WT-Lilog, POBox 800880, 7000 Stuttgart 80, May 1990.

[Sho86] Yoav Shoham. *Reasoning about Change: Time and Causation from the Standpoint of Artificial Intelligence*. PhD thesis, Yale University, 1986.

[Sho88] Yoav Shoham. *Reasoning about Change*. MIT Press, Cambridge, Mass., 1988.

[Tar56] Alfred Tarski. *Logics, Semantics and Metamathematics*. Clarendon Press, 1956.