УДК 510.653

Секвенциальные рефлексивные логики с оператором разрешимости

Евгений Золин

Введение

При построении логических исчислений в модальной логике традиционным стал выбор языка с операторами необходимости $\Box$ (и возможности $\Diamond$). Однако определенный технический и философский интерес (см. [1, 2]) представляют системы, где в качестве базисного выбирается оператор *разрешимости* (или *неслучайности*[1]), определяемый равенством $\rhd A = \Box A \vee \Box\neg A$. Этим равенством задается перевод $\rhd$-формул (т. е. формул модального языка с единственным модальным оператором $\rhd$, или $\rhd$-языка) в $\Box$-формулы. Если задана $\Box$-логика L (т. е. логика в $\Box$-языке), то *логикой разрешимости* над L (обозначение: $L^{\rhd}$) называется множество $\rhd$-формул, переводы которых являются теоремами L.

В работах [2, 3] были предложены различные аксиоматики логик разрешимости над нормальными логиками **T**, **S4** и **S5** (см. также [4, 5]). Отметим, что в случае когда логика L содержит **T**, а точнее, аксиому рефлексивности $\Box A \to A$, оператор $\Box$ вырази́м через $\rhd$ посредством равенства $\Box A = A \mathbin{\&} \rhd A$. Как следствие, построение гильбертовских аксиоматик таких логик $L^{\rhd}$ становится автоматическим (см. лемму 4.4 настоящей работы) и потому не представляет большого интереса. Напротив, построение для $L^{\rhd}$ секвенциальных исчислений, обладающих "хорошими" структурными свойствами (устранимость сечения, свойство подформульности и т. п.), имеет определенный смысл. В статье [6] построен нетривиальный пример логики, не содержащей **T**, в которой тем не менее $\Box$ вырази́м через $\rhd$.

Систематическое изучение логики разрешимости было начато в работе [7], содержащей первую, достаточно громоздкую аксиоматику минимальной логики разрешимости (т. е. логики $\mathbf{K}^{\rhd}$). В последующей работе [8] она была упрощена, а также была аксиоматизирована логика $\mathbf{K4}^{\rhd}$. В [9] предложена аксиоматика логики разрешимости над "эпистемической" логикой **KD45**; кроме того, для некоторых аксиом логик разрешимости были найдены элементарные эквиваленты. Наконец, в [10] аксиоматизирована логика $\mathbf{GL}^{\rhd}$ и построены секвенциальные исчисления для $\mathbf{K}^{\rhd}$, $\mathbf{K4}^{\rhd}$ и $\mathbf{GL}^{\rhd}$.

Настоящая работа является продолжением этого цикла исследований. После формулировки необходимых определений (§ 1) мы представляем в § 2 гильбертовские аксиоматики $L^{\rhd}$ и секвенциальные исчисления $[L_1^{\rhd}]$ и $[L_2^{\rhd}]$ для логик разрешимости над $L \in \{\mathbf{T}, \mathbf{S4}, \mathbf{B}, \mathbf{S5}, \mathbf{Grz}\}$. В § 3 описан метод

[1]Термин "неслучайность" (non-contingency) принят в англоязычной литературе; мы будем употреблять термин "разрешимость", происходящий из рассмотрения доказуемостной интерпретации оператора $\Box$ (предложение *разрешимо* в теории, если в ней доказуемо либо оно, либо его отрицание).

доказательства полноты секвенциальных исчислений в $\rhd$-языке с аналитическим сечением. Доказательству полноты построенных аксиоматик посвящен § 4. Во построенных секвенциальных исчислениях сечение не устранимо, что установлено в § 5; тем не менее, из доказанной в § 4 теоремы о полноте вытекает, что исчисления $[\mathbf{T}_2^{\rhd}]$, $[\mathbf{S4}_2^{\rhd}]$, $[\mathbf{S5}_2^{\rhd}]$ (соотв. $[\mathbf{Grz}_2^{\rhd}]$) обладают (соотв. слабым) свойством подформульности (для $[\mathbf{B}_2^{\rhd}]$ вопрос остается открытым), а в § 5 также установлено интерполяционное свойство Крейга для построенных логик разрешимости.

§ 1. Определения и факты

Пропозициональный модальный язык ($\Box$-*язык*) содержит счетное множество переменных $\mathbb{P} = \{p_0, p_1, \ldots\}$, булевы связки $\bot$ (ложь), $\to$ (импликация) и одноместный оператор $\Box$. Другие связки вводятся как сокращения, в частности: $\neg A \leftrightharpoons A \to \bot$, $\Diamond A \leftrightharpoons \neg\Box\neg A$. Множество $\Box$-*формул* $\mathbf{Fm}^{\Box}$ определяется обычным образом. *Минимальная нормальная* логика $\mathbf{K}$ имеет следующие аксиомы и правила вывода (здесь $A[B/p]$ — результат подстановки в формулу A формулы B вместо всех вхождений переменной p):

$(\mathsf{A}_{\mathrm{T}}^{\Box})$ классические тавтологии в $\Box$-языке
$(\mathsf{A}_{\mathbf{K}}^{\Box})$ $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ (дистрибутивность)

$$(\mathsf{MP})\ \frac{A \quad A \to B}{B} \qquad (\mathsf{Sub})\ \frac{A}{A[B/p]} \qquad (\mathsf{Nec})\ \frac{A}{\Box A}$$

Нас будут интересовать следующие нормальные модальные логики (дополнительные аксиомы выписаны на рис. 1):

$$\begin{array}{rr|ccc} \mathbf{T} = \mathbf{K} + (\mathsf{A}_{\mathbf{T}}^{\Box}), & \mathbf{S4} = \mathbf{T} + (\mathsf{A}_{\mathbf{4}}^{\Box}), & \mathbf{T} \subset & \mathbf{S4} \subset & \mathbf{S4.1} \\ \mathbf{B} = \mathbf{T} + (\mathsf{A}_{\mathbf{B}}^{\Box}), & \mathbf{S5} = \mathbf{T} + (\mathsf{A}_{\mathbf{5}}^{\Box}), & \cap & \cap & \cap \\ \mathbf{S4.1} = \mathbf{S4} + (\mathsf{A}_{\mathbf{1}}^{\Box}), & \mathbf{Grz} = \mathbf{K} + (\mathsf{A}_{\mathbf{G}}^{\Box}). & \mathbf{B} \subset & \mathbf{S5} & \mathbf{Grz} \end{array}$$

$(\mathsf{A}_{\mathbf{T}}^{\Box})$	$\Box p \to p$	(рефлексивность)
$(\mathsf{A}_{\mathbf{B}}^{\Box})$	$p \to \Box\Diamond p$	(симметричность)
$(\mathsf{A}_{\mathbf{4}}^{\Box})$	$\Box p \to \Box\Box p$	(транзитивность)
$(\mathsf{A}_{\mathbf{5}}^{\Box})$	$\Diamond p \to \Box\Diamond p$	(евклидовость)
$(\mathsf{A}_{\mathbf{1}}^{\Box})$	$\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$	(аксиома Маккинси)
$(\mathsf{A}_{\mathbf{G}}^{\Box})$	$\Box(\Box(p \to \Box p) \to p) \to p$	(аксиома Гжегорчика)

Рис. 1: Аксиомы нормальных логик.

Секвенция есть выражение вида $\Pi \Rightarrow \Sigma$, где Π и Σ — конечные мультимножества[2] формул. Включение мультимножеств формул понимаем без учета кратности, то есть запись $\Pi \subseteq \Sigma$ означает, что всякая формула из Π входит в Σ. Мы обозначаем $\Pi\Sigma := \Pi \cup \Sigma$ и $\Pi A := \Pi \cup \{A\}$. Множество подформул формулы A обозначаем $\mathrm{Sb}\, A$, и если Γ — (мульти)множество формул, то $\mathrm{Sb}\,\Gamma := \bigcup\{\mathrm{Sb}\, A \mid A \in \Gamma\}$. Если секвенция $\Pi \Rightarrow \Sigma$ обозначена как w,

[2]Под *мультимножеством* понимается множество с указанием кратности ($\geqslant 0$) вхождения элементов. Формально, мультимножество $\Box$-формул есть отображение $\mathbf{Fm}^{\Box} \to \mathbb{N}$.

то обозначим ее антецедент $\langle w| := \Pi$, сукцедент $|w\rangle := \Sigma$, множество подформул $\mathrm{Sb}\, w := \mathrm{Sb}\, \Pi\Sigma$. Пишем $A \in w$, если $A \in \Pi\Sigma$, а также $\Gamma \subseteq w$, если $\Gamma \subseteq \Pi\Sigma$, и $w \subseteq \Gamma$, если $\Pi\Sigma \subseteq \Gamma$. Если $\mathcal{L}$ — секвенциальное исчисление, то запись $\mathcal{L} \vdash A \Leftrightarrow B$ означает: $\mathcal{L} \vdash A \Rightarrow B$ и $\mathcal{L} \vdash B \Rightarrow A$.

Секвенциальное исчисление $[L]$ для логики $L \in \{\mathbf{T}, \mathbf{S4}, \mathbf{B}, \mathbf{S5}, \mathbf{Grz}\}$ получается добавлением к секвенциальному исчислению высказываний (с сечением) правил $(\Box\Rightarrow)$ и $(\Rightarrow^{\Box}_{L})$ (рис. 2). Известно, что сечение устранимо в

$$(\Box\Rightarrow)\ \frac{A, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Box A, \Pi \Rightarrow \Sigma} \qquad (\Rightarrow^{\Box}_{\mathbf{B}})\ \frac{\Pi \Rightarrow \Box\Sigma, A}{\Box\Pi \Rightarrow \Sigma, \Box A} \qquad (\Rightarrow^{\Box}_{\mathbf{S5}})\ \frac{\Box\Pi \Rightarrow \Box\Sigma, A}{\Box\Pi \Rightarrow \Box\Sigma, \Box A}$$

$$(\Rightarrow^{\Box}_{\mathbf{T}})\ \frac{\Pi \Rightarrow A}{\Box\Pi \Rightarrow \Box A} \qquad (\Rightarrow^{\Box}_{\mathbf{S4}})\ \frac{\Box\Pi \Rightarrow A}{\Box\Pi \Rightarrow \Box A} \qquad (\Rightarrow^{\Box}_{\mathbf{Grz}})\ \frac{\Box(A \to \Box A), \Box\Pi \Rightarrow A}{\Box\Pi \Rightarrow \Box A}$$

Рис. 2: Секвенциальные правила нормальных логик.

исчислениях для $\mathbf{T}$, $\mathbf{S4}$ и $\mathbf{Grz}$ [11] и не устранимо в исчислениях для $\mathbf{B}$ и $\mathbf{S5}$ [12, 13, 14]. В последних можно ограничиться *аналитическим* сечением [15]:

$$\frac{\Pi \Rightarrow \Sigma, A \quad A, \Pi' \Rightarrow \Sigma'}{\Pi\Pi' \Rightarrow \Sigma\Sigma'}, \quad A \in \mathrm{Sb}(\Pi\Pi'\Sigma\Sigma').$$

Получающееся при этом исчисление $[\mathbf{S5}]$ обладает *свойством подформульности* [14]: всякая выводимая секвенция $\Pi \Rightarrow \Sigma$ имеет вывод, все секвенции которого состоят из подформул формул из $\Pi\Sigma$. Правило $(\Rightarrow^{\Box}_{\mathbf{B}})$ может нарушать свойство подформульности, однако известно [14], что можно ограничиться такими его применениями, в которых $\Sigma \subseteq \mathrm{Sb}(\Pi A)$, и даже $\Box\Sigma \subseteq \mathrm{Sb}(\Pi A)$. Тем самым свойство подформульности справедливо и для $[\mathbf{B}]$. Наконец, исчисление $[\mathbf{Grz}]$ обладает *слабым* свойством подформульности: всякая выводимая секвенция $\Pi \Rightarrow \Sigma$ имеет вывод, состоящий из секвенций вида $\Gamma \Rightarrow \Delta$, где $\Delta \subseteq \mathrm{Sb}\,\Pi\Sigma$ и $\Gamma \subseteq \mathrm{Sb}(\Pi\Sigma \cup \{\Box(A \to \Box A) \mid \Box A \in \mathrm{Sb}\,\Pi\Sigma\})$.

Для формулировки логик разрешимости введем $\triangleright$-язык, отличающийся от $\Box$-языка лишь заменой символа $\Box$ на $\triangleright$, и множество *$\triangleright$-формул* $\mathbf{Fm}^{\triangleright}$. Зададим $\triangleright$-перевод $\mathsf{tr}\colon \mathbf{Fm}^{\triangleright} \to \mathbf{Fm}^{\Box}$, сохраняющий переменные и булевы связки и $\mathsf{tr}(\triangleright A) = \Box\mathsf{tr}(A) \vee \Box\neg\mathsf{tr}(A)$. Вместо $\mathsf{tr}(A)$ будем часто писать $A_{\triangleright}$. Допуская вольность в обозначениях, мы иногда пишем $\triangleright A$, где A есть $\Box$-формула, подразумевая $\Box A \vee \Box\neg A$; такое использование символа $\triangleright$ легко распознать по контексту. *Логикой разрешимости* над логикой L назовем множество $\triangleright$-формул, $\triangleright$-переводы которых являются теоремами логики L:

$$L^{\triangleright} := \{A \in \mathbf{Fm}^{\triangleright} \mid A_{\triangleright} \in L\}.$$

Семантика Крипке для $\Box$- и $\triangleright$-языков вводится обычным образом. Отношение достижимости в шкале и обратное к нему мы обозначаем $\uparrow$ и $\downarrow$ соответственно; кванторы по достижимым из w точкам мы записываем как $\forall x{\downarrow}w$ и $\exists x{\downarrow}w$. В этих обозначениях модальный пункт определения истинности $\triangleright$-формулы в точке модели имеет вид:

$$w \models \triangleright A \quad \leftrightharpoons \quad (\forall x{\downarrow}w \quad x \models A) \text{ или } (\forall x{\downarrow}w \quad x \not\models A).$$

Очевидно, что $w \models A \Leftrightarrow w \models A_{\triangleright}$ для любой $\triangleright$-формулы A. Если Γ — множество формул, то Γ-*шкалой* называется шкала, на которой общезначимо Γ. Под истинностью (общезначимостью) секвенции $\Pi \Rightarrow \Sigma$ подразумеваем истинность (общезначимость) формулы $\bigwedge\Pi \to \bigvee\Sigma$.

§ 2. Аксиоматические системы

Аксиомами минимальной рефлексивной логики разрешимости $\mathbf{T}^{\triangleright}$ являются все классические тавтологии в $\triangleright$-языке, следующие аксиомы:

$$
\begin{array}{lll}
(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\neg}) & \triangleright p \leftrightarrow \triangleright\neg p & \text{(зеркальность)} \\
(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{T}}) & p \to [\triangleright(p \to q) \to (\triangleright p \to \triangleright q)] & \text{(слабая дистрибутивность)}
\end{array}
$$

а правилами вывода — (MP), (Sub) и (Dec) $\frac{A}{\triangleright A}$. Аксиоматика других рефлексивных логик разрешимости приведена ниже (гипотеза: в формулировке исчисления $\mathbf{Grz}^{\triangleright}$ аксиома $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{4}})$ является лишней).

$$
\begin{array}{rcl@{\qquad\qquad}ll}
\mathbf{B}^{\triangleright} &=& \mathbf{T}^{\triangleright} + (\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{B}}), & (\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{B}}) & p \to \triangleright(\triangleright p \to p) \\
\mathbf{S4}^{\triangleright} &=& \mathbf{T}^{\triangleright} + (\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{4}}), & (\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{4}}) & \triangleright p \to \triangleright\triangleright p \\
\mathbf{S5}^{\triangleright} &=& \mathbf{T}^{\triangleright} + (\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{5}}), & (\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{5}}) & \triangleright\triangleright p \\
\mathbf{Grz}^{\triangleright} &=& \mathbf{S4}^{\triangleright} + (\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{G}}). & (\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{G}}) & \triangleright(\triangleright(p \to \triangleright p) \to p) \to \triangleright p
\end{array}
$$

Далее L обозначает одну из логик $\mathbf{T}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{S4}$, $\mathbf{S5}$, $\mathbf{Grz}$. Записывая выводы схематично, мы пишем $L \vdash A_0 \overset{1}{\text{—}} A_1 \overset{2}{\text{—}} \ldots \overset{n}{\text{—}} A_n$, где $\overset{\kappa}{\text{—}} \in \{\to, \leftrightarrow\}$, подразумевая $L \vdash A_{\kappa-1} \overset{\kappa}{\text{—}} A_\kappa$, $\kappa = 1..n$.

Лемма 2.1 **(а)** *Исчисления* $L^{\triangleright}$ *замкнуты относительно правила эквивалентной замены* (RE) $\dfrac{A \leftrightarrow B}{\triangleright A \leftrightarrow \triangleright B}$.

(б) $\mathbf{T}^{\triangleright} \vdash \triangleright p \,\&\, \triangleright q \to \triangleright(p \,\&\, q)$.

Доказательство. **(а)** По правилу (Dec) и аксиоме $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{T}})$ из $A \to B$ получаем $A \to (\triangleright A \to \triangleright B)$, а из $\neg A \to \neg B$ сначала $\neg A \to (\triangleright\neg A \to \triangleright\neg B)$, а затем $\neg A \to (\triangleright A \to \triangleright B)$ по аксиоме $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\neg})$. Ввиду $\vdash A \vee \neg A$ из двух полученных формул выводим $\triangleright A \to \triangleright B$. Обратная импликация доказывается аналогично.

(б) Из тавтологии $p \to (q \to p \,\&\, q)$ по аксиоме $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{T}})$ получаем $p \,\&\, q \to [\triangleright p \to (\triangleright q \to \triangleright(p \& q))]$. Из тавтологии $\neg p \to \neg(p \& q)$ по аксиомам $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{T}})$, $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\neg})$ получаем $\neg p \to [\triangleright p \to \triangleright(p \,\&\, q)]$, и тем более, $\neg p \to [\triangleright p \to (\triangleright q \to \triangleright(p \,\&\, q))]$. Аналогично выводится $\neg q \to [\triangleright p \to (\triangleright q \to \triangleright(p \,\&\, q))]$. Наконец, в силу тавтологии $(p \,\&\, q) \vee \neg p \vee \neg q$, заключаем: $\triangleright p \to (\triangleright q \to \triangleright(p \,\&\, q))$. ⊣

Для каждой из рассматриваемых логик L сформулируем два секвенциальных исчисления $[L^{\triangleright}_1]$ и $[L^{\triangleright}_2]$. Исчисление $[L^{\triangleright}_1]$ получается добавлением к секвенциальному исчислению высказываний (с сечением) правил $(\overset{\triangleright}{\neg}{\Rightarrow})$, $({\Rightarrow}\overset{\triangleright}{\neg})$ и $({\Rightarrow}^{\triangleright}_{L})$, выписанных на рис. 3. При формулировке правила $({\Rightarrow}^{\triangleright}_{\mathbf{B}})$ использовано обозначение $(\triangleright\Sigma \,\&\, \Sigma) := \{(\triangleright\sigma \,\&\, \sigma) \mid \sigma \in \Sigma\}$.

Правила $(\overset{\triangleright}{\neg}{\Rightarrow})$ и $({\Rightarrow}\overset{\triangleright}{\neg})$ нарушают свойство подформульности. Введем исчисление $[L^{\triangleright}_2]$, в котором данные правила поглощены другими. Это исчисление получаем добавлением к секвенциальному исчислению высказываний

$$(\overset{\triangleright}{\neg}\Rightarrow)\ \frac{\triangleright A, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\triangleright\neg A, \Pi \Rightarrow \Sigma} \qquad (\Rightarrow^{\triangleright}_{\mathbf{T}})\ \frac{\Pi \Rightarrow A}{\Pi, \triangleright\Pi \Rightarrow \triangleright A} \qquad (\Rightarrow^{\triangleright}_{\mathbf{B}})\ \frac{\Pi \Rightarrow (\triangleright\Sigma \,\&\, \Sigma), A}{\Pi, \triangleright\Pi \Rightarrow \Sigma, \triangleright A}$$

$$(\Rightarrow\overset{\triangleright}{\neg})\ \frac{\Pi \Rightarrow \Sigma, \triangleright A}{\Pi \Rightarrow \Sigma, \triangleright\neg A} \qquad (\Rightarrow^{\triangleright}_{\mathbf{S4}})\ \frac{\Pi, \triangleright\Pi \Rightarrow A}{\Pi, \triangleright\Pi \Rightarrow \triangleright A} \qquad (\Rightarrow^{\triangleright}_{\mathbf{S5}})\ \frac{\Pi, \triangleright\Pi \Rightarrow \triangleright\Sigma, A}{\Pi, \triangleright\Pi \Rightarrow \triangleright\Sigma, \triangleright A}$$

$$(\Rightarrow^{\triangleright}_{\mathbf{Grz}})\ \frac{\triangleright(A \to \triangleright A), \Pi, \triangleright\Pi \Rightarrow A}{\Pi, \triangleright\Pi \Rightarrow \triangleright A}$$

Рис. 3: Правила исчислений $[L^{\triangleright}_1]$.

(с сечением) правил $(\Rightarrow^{\triangleright r}_{L})$, $r \in \{0, 1\}$, указанных на рис. 4; при их формулировке используются обозначения: $\overline{r} := 1 - r$, $A^0 := \varnothing$, $A^1 := A$. Правила $(\Rightarrow^{\triangleright r}_{\mathbf{B}})$, $r \in \{0, 1\}$, имеют $2^{|\Sigma|+|\Sigma'|}$ посылок, отвечающих всевозможным разбиениям мультимножеств $\Sigma = \Phi\Psi$ и $\Sigma' = \Phi'\Psi'$.

$$(\Rightarrow^{\triangleright r}_{\mathbf{T}})\ \frac{A^{\overline{r}}, \Pi \Rightarrow \Lambda, A^r}{\Pi, \triangleright(\Pi\Lambda) \Rightarrow \Lambda, \triangleright A} \qquad (\Rightarrow^{\triangleright r}_{\mathbf{B}})\ \frac{\{A^{\overline{r}}, \Pi, \Phi' \Rightarrow \Phi, \triangleright(\Psi'\Psi), \Lambda, A^r\}^{\Sigma=\Phi\Psi}_{\Sigma'=\Phi'\Psi'}}{\Pi, \triangleright(\Pi\Lambda), \Sigma' \Rightarrow \Sigma, \Lambda, \triangleright A}$$

$$(\Rightarrow^{\triangleright r}_{\mathbf{S4}})\ \frac{A^{\overline{r}}, \Pi, \triangleright(\Pi\Lambda) \Rightarrow \Lambda, A^r}{\Pi, \triangleright(\Pi\Lambda) \Rightarrow \Lambda, \triangleright A} \qquad (\Rightarrow^{\triangleright 0}_{\mathbf{Grz}})\ \frac{A, \triangleright(A \vee \triangleright A), \Pi, \triangleright(\Pi\Lambda) \Rightarrow \Lambda}{\Pi, \triangleright(\Pi\Lambda) \Rightarrow \Lambda, \triangleright A}$$

$$(\Rightarrow^{\triangleright r}_{\mathbf{S5}})\ \frac{A^{\overline{r}}, \Pi, \triangleright(\Pi\Lambda) \Rightarrow \Lambda, \triangleright\Sigma, A^r}{\Pi, \triangleright(\Pi\Lambda) \Rightarrow \Lambda, \triangleright\Sigma, \triangleright A} \qquad (\Rightarrow^{\triangleright 1}_{\mathbf{Grz}})\ \frac{\triangleright(A \to \triangleright A), \Pi, \triangleright(\Pi\Lambda) \Rightarrow \Lambda, A}{\Pi, \triangleright(\Pi\Lambda) \Rightarrow \Lambda, \triangleright A}$$

Рис. 4: Правила исчислений $[L^{\triangleright}_2]$.

В §4 мы докажем, что в построенных исчислениях $[L^{\triangleright}_{\kappa}]$ сечение не устранимо. Обозначим теперь через $[L^{\triangleright}_2]^-$ исчисления, полученные из $[L^{\triangleright}_2]$ заменой правила сечения на *аналитическое* сечение. Как будет следовать из теоремы 4.1 о полноте, исчисления $[L^{\triangleright}_2]^-$ и $[L^{\triangleright}_2]$ эквивалентны. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.2
(а) *Исчисления* $[\mathbf{T}^{\triangleright}_2]$, $[\mathbf{S4}^{\triangleright}_2]$ *и* $[\mathbf{S5}^{\triangleright}_2]$ *обладают свойством подформульности.*
(б) *Исчисление* $[\mathbf{Grz}^{\triangleright}_2]$ *обладает слабым свойством подформульности: всякая выводимая секвенция* $\Pi \Rightarrow \Sigma$ *имеет вывод, состоящий из секвенций вида* $\Gamma \Rightarrow \Delta$, *где* $\Delta \subseteq \mathrm{Sb}\,\Pi\Sigma$ *и* $\Gamma \subseteq \mathrm{Sb}(\Pi\Sigma \cup \{\triangleright(A \to \triangleright A), \triangleright(A \vee \triangleright A) \mid \triangleright A \in \mathrm{Sb}\,\Pi\Sigma\})$.

В дальнейшем нам потребуется следующая лемма.

Лемма 2.3
(а) *Для* $L \in \{\mathbf{T}, \mathbf{S4}, \mathbf{B}, \mathbf{S5}, \mathbf{Grz}\}$ *исчисление* $[L^{\triangleright}_1]$ *замкнуто относительно правила* (RE), *то есть из* $[L^{\triangleright}_1] \vdash A \Leftrightarrow B$ *следует* $[L^{\triangleright}_1] \vdash \triangleright A \Leftrightarrow \triangleright B$.
(б) $[\mathbf{T}^{\triangleright}_2]^- \vdash \triangleright(p \to \triangleright p), p \Rightarrow \triangleright p$. **(в)** $[\mathbf{T}^{\triangleright}_2]^- \vdash \triangleright(p \vee \triangleright p) \Rightarrow p, \triangleright p$.

Доказательство. **(а)** Имеем вывод в $[\mathbf{T}_1^{\triangleright}]$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow B}{A, \triangleright A \Rightarrow \triangleright B}}{\triangleright A \Rightarrow \triangleright B, \neg A} \quad \dfrac{\dfrac{B \Rightarrow A}{\neg A \Rightarrow \neg B}}{\neg A, \triangleright\neg A \Rightarrow \triangleright\neg B}}{\triangleright A, \triangleright\neg A \Rightarrow \triangleright B, \triangleright\neg B}$$

Применив сечения с секвенцией $\triangleright A \Rightarrow \triangleright\neg A$ (по формуле $\triangleright\neg A$) и с секвенцией $\triangleright\neg B \Rightarrow \triangleright B$ (по формуле $\triangleright\neg B$), а затем сокращения, получим $\triangleright A \Rightarrow \triangleright B$. Обратная секвенция доказывается аналогично.

(б) Пользуясь аналитическим сечением, выводим $[\mathbf{T}_2^{\triangleright}]^{-}$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \Rightarrow \triangleright p, p}{\Rightarrow (p \to \triangleright p), p}}{\triangleright(p \to \triangleright p) \Rightarrow (p \to \triangleright p), \triangleright p} \quad \dfrac{p \Rightarrow p \quad \triangleright p \Rightarrow \triangleright p}{(p \to \triangleright p), p \Rightarrow \triangleright p}}{\triangleright(p \to \triangleright p), p \Rightarrow \triangleright p, \triangleright p}}{\triangleright(p \to \triangleright p), p \Rightarrow \triangleright p}}{}$$

(в) Аналогично пункту (б). ⊣

§ 3. Метод замыкания

В этом параграфе описан метод доказательства полноты для произвольного непротиворечивого секвенциального исчисления $\mathcal{L}$ (в $\triangleright$-языке) с аналитическим сечением.

Определение 3.1 Множество формул Γ *замкнуто*, если $\mathrm{Sb}\,\Gamma \subseteq \Gamma$. Секвенцию w назовем *замкнутой*, если $\mathrm{Sb}\,w \subseteq w$, т. е. всякая подформула формулы из w содержится в антецеденте или сукцеденте секвенции w; *тонкой*, если ее антецедент и сукцедент являются множествами, т. е. формулы в них не повторяются.

Очевидно, для всякого конечного (мульти)множества формул существует наименьшее содержащее его *конечное* замкнутое множество. Построим конечную шкалу $F_{\mathcal{L}}^{\Gamma} := (W_{\mathcal{L}}^{\Gamma}, \uparrow)$ и модель $M_{\mathcal{L}}^{\Gamma} := (F_{\mathcal{L}}^{\Gamma}, \models)$, где $\Gamma \neq \varnothing$ — конечное замкнутое множество формул. Множество $W_{\mathcal{L}}^{\Gamma} := \{w \subseteq \Gamma \mid w$ есть замкнутая тонкая секвенция, $\mathcal{L} \nvdash w\}$, очевидно, конечно.

Лемма 3.2 (О замыкании) *Всякую невыводимую в $\mathcal{L}$ секвенцию $\Pi \Rightarrow \Sigma$, состоящую из формул множества Γ, можно расширить до тонкой замкнутой невыводимой в $\mathcal{L}$ секвенции. Формально, если $\Pi\Sigma \subseteq \Gamma$ и $\mathcal{L} \nvdash \Pi \Rightarrow \Sigma$, то $\exists w \in W_{\mathcal{L}}^{\Gamma}$: $\Pi \subseteq \langle w|$, $\Sigma \subseteq |w\rangle$.*

Доказательство проводится стандартным методом замыкания: если $\mathcal{L} \nvdash \Pi \Rightarrow \Sigma$, $A \notin \Pi\Sigma$ и $A \in \mathrm{Sb}\,\Pi\Sigma$, то ввиду наличия в $\mathcal{L}$ аналитического сечения (и сокращения) имеем $\mathcal{L} \nvdash \Pi \Rightarrow \Sigma A$ или $\mathcal{L} \nvdash A\Pi \Rightarrow \Sigma$, поэтому A можно добавить в антецедент или сукцедент секвенции $\Pi \Rightarrow \Sigma$. Процесс продолжается, пока секвенция $\Pi \Rightarrow \Sigma$ не станет замкнутой. ⊣

Отметим, что ввиду $\Gamma \neq \varnothing$ имеем $\bot \in \Gamma$ или $p \in \Gamma$ для некоторой переменной p. Значит, Γ содержит секвенцию $\Rightarrow \bot$ или $\Rightarrow p$, очевидно, не выводимую в $\mathcal{L}$. По лемме о замыкании ее можно погрузить в некоторый "мир" $w \in W^{\Gamma}_{\mathcal{L}}$. Таким образом, $W^{\Gamma}_{\mathcal{L}} \neq \varnothing$.

Зададим оценку переменных, положив $w \models p \leftrightharpoons p \in \langle w|$ для любых $w \in W^{\Gamma}_{\mathcal{L}}$ и $p \in \mathbb{P}$. Осталось задать отношение $\uparrow$. Сформулируем условие на $\uparrow$, выполнения которого достаточно для наших целей.

$$\langle 1^{\triangleright}\rangle \qquad \forall w \in W^{\Gamma}_{\mathcal{L}}\ \forall A \in w. \qquad w \models A \Leftrightarrow A \in \langle w|.$$

Лемма 3.3 *Если выполнено* $\langle 1^{\triangleright}\rangle$, *то для любых* $\Pi\Sigma \subseteq \Gamma$ *из* $\mathcal{L} \nvdash \Pi \Rightarrow \Sigma$ *следует* $M^{\Gamma}_{\mathcal{L}} \not\models \Pi \Rightarrow \Sigma$.

Доказательство. По лемме о замыкании $\Pi \subseteq \langle w|$ и $\Sigma \subseteq |w\rangle$ для некоторого $w \in W^{\Gamma}_{\mathcal{L}}$. По $\langle 1^{\triangleright}\rangle$ имеем $w \models \bigwedge\Pi$ и $w \models \bigwedge\neg\Sigma$, т. е. $w \not\models \Pi \Rightarrow \Sigma$. $\dashv$

Покажем далее, что для удовлетворения $\langle 1^{\triangleright}\rangle$ достаточно наложить на $\uparrow$ следующее условие (квадратная скобка означает дизъюнкцию условий):

$$\langle 2^{\triangleright}\rangle \qquad \forall w \in W^{\Gamma}_{\mathcal{L}}\ \forall \triangleright B \in w. \qquad \triangleright B \in \langle w| \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{ll} \forall x{\downarrow}w & B \in \langle x|, \\ \forall x{\downarrow}w & B \in |x\rangle. \end{array}\right.$$

Лемма 3.4 $\langle 2^{\triangleright}\rangle \Rightarrow \langle 1^{\triangleright}\rangle$.

Доказательство проведем одновременно для всех $w \in W^{\Gamma}_{\mathcal{L}}$ индукцией по построению формулы $A \in w$. При $A \equiv \bot$ левая и правая части $\langle 1^{\triangleright}\rangle$ ложны. Для $A \equiv p$ утверждение следует из определения $\models$.

Пусть $A \equiv (B \to C)$. Так как секвенция w замкнута, то $B, C \in w$, и по предположению индукции:

$$\begin{array}{ll} \textbf{(b)} & w \models B \Leftrightarrow B \in \langle w|; \quad w \not\models B \Leftrightarrow B \in |w\rangle; \\ \textbf{(c)} & w \models C \Leftrightarrow C \in \langle w|; \quad w \not\models C \Leftrightarrow C \in |w\rangle. \end{array}$$

Отсюда:

$$w \models (B \to C) \overset{\mathrm{def}\models}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{l} w \not\models B \\ w \models C \end{array}\right. \overset{\mathbf{(b,c)}}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{l} B \in |w\rangle \\ C \in \langle w| \end{array}\right. \overset{(?)}{\Longleftrightarrow} (B \to C) \in \langle w|.$$

Докажем эквивалентность, помеченную (?).

($\Rightarrow$) Если $(B \to C) \in |w\rangle$, то $B \notin |w\rangle$ и $C \notin \langle w|$, поскольку в $\mathcal{L}$ доказуемы секвенции $\Rightarrow B, (B \to C)$ и $C \Rightarrow (B \to C)$.

($\Leftarrow$) Если $(B \to C) \in \langle w|$, то невозможно одновременно $B \in \langle w|$ и $C \in |w\rangle$, ибо секвенция $(B \to C), B \Rightarrow C$ доказуема в $\mathcal{L}$.

Наконец, пусть $A \equiv \triangleright B$. По предположению индукции для любого $x \in W^{\Gamma}_{\mathcal{L}}$ если $B \in x$, то

$$\textbf{(x)} \qquad x \models B \Leftrightarrow B \in \langle x|; \qquad x \not\models B \Leftrightarrow B \in |x\rangle.$$

Отсюда:

$$\triangleright B \in \langle w| \overset{\langle 2^{\triangleright}\rangle}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{ll} \forall x{\downarrow}w & B \in \langle x| \\ \forall x{\downarrow}w & B \in |x\rangle \end{array}\right. \overset{\mathbf{(x)}}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{ll} \forall x{\downarrow}w & x \models B \\ \forall x{\downarrow}w & x \not\models B \end{array}\right. \overset{\mathrm{def}\models}{\Longrightarrow} w \models \triangleright B,$$

$$\triangleright B \in |w\rangle \overset{\langle 2^{\triangleright}\rangle}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{ll} \exists x{\downarrow}w & B \in \langle x| \\ \exists y{\downarrow}w & B \in |y\rangle \end{array}\right. \overset{\mathbf{(x)}}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{ll} \exists x{\downarrow}w & x \models B \\ \exists y{\downarrow}w & y \not\models B \end{array}\right. \overset{\mathrm{def}\models}{\Longrightarrow} w \not\models \triangleright B. \qquad \dashv$$

Теперь полноту исчисления $\mathcal{L}$ относительно класса конечных шкал $\mathcal{F}$ можно доказывать следующим образом. Пусть $\mathcal{L} \nvdash \Pi \Rightarrow \Sigma$. Строим конечное замкнутое множество $\Gamma \supseteq \Pi\Sigma$ и отношение $\uparrow$ так, что $F^{\Gamma}_{\mathcal{L}} \in \mathcal{F}$ и выполнено условие $\langle 2^{\triangleright}\rangle$. Из него по лемме 3.4 вытекает $\langle 1^{\triangleright}\rangle$, и в силу леммы 3.3 получаем $F^{\Gamma}_{\mathcal{L}} \not\models \Pi \Rightarrow \Sigma$, что и требовалось.

§ 4. Полнота аксиоматик

Доказываемая в этом параграфе теорема утверждает, что построенные выше гильбертовские и секвенциальные исчисления дают полную аксиоматизацию логик разрешимости над **T**, **S4**, **B**, **S5** и **Grz**. В конце параграфа мы аксиоматизируем логику $\mathbf{S4.1}^{\rhd}$.

Теорема 4.1 (Совместная теорема о полноте)

Для каждой логики $L \in \{\mathbf{T}, \mathbf{S4}, \mathbf{B}, \mathbf{S5}, \mathbf{Grz}\}$ *и любой секвенции* $\Pi \Rightarrow \Sigma$ *в* $\rhd$*-языке эквивалентны следующие утверждения:*

(1) $[L_2^{\rhd}]^{-} \vdash \Pi \Rightarrow \Sigma$,

(2) $[L_1^{\rhd}] \vdash \Pi \Rightarrow \Sigma$,

(3) $L^{\rhd} \vdash \bigwedge\Pi \to \bigvee\Sigma$,

(4) $L \vdash (\bigwedge\Pi \to \bigvee\Sigma)_{\rhd}$,

(5) $F \models \Pi \Rightarrow \Sigma$ *для любой конечной* L*-шкалы* F.

Доказательство проведем по схеме (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Leftrightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (1). Импликация (2) $\Rightarrow$ (3) доказывается индукцией по построению вывода в $[L_1^{\rhd}]$; при этом шаги, отвечающие правилам $({}^{\rhd}_{\neg}{\Rightarrow})$ и $({\Rightarrow}^{\rhd}_{\neg})$, очевидны ввиду наличия в логиках $L^{\rhd}$ аксиомы $(\mathsf{A}^{\rhd}_{\neg})$; поэтому необходимо лишь проверять шаги, отвечающие правилу $({\Rightarrow}^{\rhd}_{L})$. Импликацию (3) $\Rightarrow$ (4) достаточно доказывать лишь для $\Pi = \varnothing$ и $\Sigma = \{A\}$, т. е. проверять выводимость $\rhd$-переводов аксиом $L^{\rhd}$ в L; для аксиомы $(\mathsf{A}^{\rhd}_{\neg})$ эта проверка тривиальна, а для $(\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{T}})$, $(\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{4}})$ и $(\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{5}})$ она проведена в [2, 3]. Далее, эквивалентность (4) $\Leftrightarrow$ (5) есть известная (см. [16, 17]) теорема о полноте логик L. Наконец, при доказательстве импликации (5) $\Rightarrow$ (1) мы обозначаем исчисление $\mathcal{L} := [L_2^{\rhd}]^{-}$.

(1) $\Rightarrow$ (2) Достаточно показать, что правила $({\Rightarrow}^{\rhd r}_{L})$ являются производными в $[L_1^{\rhd}]$. Выведем, например, заключение правила $({\Rightarrow}^{\rhd 0}_{\mathbf{T}})$ из его посылки в исчислении $[\mathbf{T}_1^{\rhd}]$:

$$\cfrac{\cfrac{A, \Pi \Rightarrow \Lambda}{\Pi, \neg\Lambda \Rightarrow \neg A}}{\Pi, \neg\Lambda, \rhd\Pi, \rhd\neg\Lambda \Rightarrow \rhd\neg A}$$

Применив сечение с секвенцией $\rhd\neg A \Rightarrow \rhd A$ (по формуле $\rhd\neg A$), а также с секвенциями $\Rightarrow C, \neg C$ (по $\neg C$) и $\rhd C \Rightarrow \rhd\neg C$ (по $\rhd\neg C$) для всех $C \in \Lambda$, мы получим $\Pi, \rhd(\Pi\Lambda) \Rightarrow \Lambda, \rhd A$.

При рассмотрении правила $({\Rightarrow}^{\rhd 0}_{\mathbf{Grz}})$ потребуется выводимость в $[\mathbf{Grz}_1^{\rhd}]$ секвенции $\rhd(\neg A \to \rhd\neg A) \Rightarrow \rhd(A \vee \rhd A)$, вытекающая из леммы 2.3 (а).

Логика T.

(2) $\Rightarrow$ (3) По лемме 2.1 (б), $\mathbf{T}^{\rhd} \vdash \bigwedge\rhd\Pi \to \rhd\bigwedge\Pi$, поэтому выводим в $\mathbf{T}^{\rhd}$:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\bigwedge\Pi \to B}{\rhd(\bigwedge\Pi \to B)}}{\bigwedge\Pi \to [\rhd\bigwedge\Pi \to \rhd B]}}{\bigwedge\{\Pi, \rhd\Pi\} \to \rhd B}$$

(5) $\Rightarrow$ (1) Допустим $\mathcal{L} \nvdash \Pi \Rightarrow \Sigma$. Возьмем конечное замкнутое множество $\Gamma := \mathrm{Sb}\,\Pi\Sigma$. На $W^{\Gamma}_{\mathcal{L}}$ введем рефлексивное отношение:

$$\langle 3^{\rhd}_{\mathbf{T}} \rangle \qquad w{\uparrow}x \;\leftrightharpoons\; \forall C \in \mathbf{Fm}^{\rhd}. \quad \rhd C \in \langle w| \Rightarrow \begin{cases} C \in \langle w| \Rightarrow C \in \langle x|, \\ C \in |w\rangle \Rightarrow C \in |x\rangle. \end{cases}$$

Тогда $F^\Gamma_{\mathcal{L}}$ — конечная **T**-шкала, и остается проверить условие $\langle 2^\rhd \rangle$.

Лемма 4.2 $\langle 3^\rhd_{\mathbf{T}} \rangle \Rightarrow \langle 2^\rhd \rangle$.

▶ Докажем эквивалентность в $\langle 2^\rhd \rangle$. Берем $w \in W^\Gamma_{\mathcal{L}}$ и $\rhd B \in w$.

$(\Rightarrow)$ Пусть $\rhd B \in \langle w|$. Ввиду замкнутости w возможны два случая:

1) $B \in \langle w|$. Тогда $\forall x{\downarrow}w$ по $\langle 3^\rhd_{\mathbf{T}} \rangle$ получаем $B \in \langle x|$.

2) $B \in |w\rangle$. Аналогично $\forall x{\downarrow}w$ получаем $B \in |x\rangle$.

$(\Leftarrow)$ Пусть $\rhd B \in |w\rangle$. Построим такие $x, y{\downarrow}w$, что $B \in \langle x|$, $B \in |y\rangle$.

Случай $B \in |w\rangle$. Выбор y очевиден: $y := w$. Положим

$$\Pi := \{C \in \langle w| \bigm| \rhd C \in \langle w|\},$$
$$\Lambda := \{C \in |w\rangle \bigm| \rhd C \in \langle w|\}.$$

Тогда $\mathcal{L} \nvdash B, \Pi \Rightarrow \Lambda$, ибо иначе по правилу $(\Rightarrow^{\rhd 0}_{\mathbf{T}})$ получим $\mathcal{L} \vdash \Pi, \rhd(\Pi\Lambda) \Rightarrow \Lambda, \rhd B$, откуда ослаблением $\mathcal{L} \vdash w$. По лемме о замыкании $\exists x \in W^\Gamma_{\mathcal{L}}$: $\Pi \subseteq \langle x|$, $B \in \langle x|$, $\Lambda \subseteq |x\rangle$. Докажем, что $w{\uparrow}x$. Пусть $\rhd C \in \langle w|$. Если $C \in \langle w|$, то $C \in \Pi \subseteq \langle x|$; если же $C \in |w\rangle$, то $C \in \Lambda \subseteq |x\rangle$.

Случай $B \in \langle w|$. Положив $x := w$ и используя $(\Rightarrow^{\rhd 1}_{\mathbf{T}})$, аналогично строим искомый y (для остальных логик мы будем обычно рассматривать только первый случай). ◀

<u>**Логика S4.**</u> (2) $\Rightarrow$ (3) Вывод в $\mathbf{S4}^\rhd$:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\bigwedge\{\Pi, \rhd\Pi\} \to B}{\bigwedge\{\Pi, \rhd\Pi\} \to [\rhd \bigwedge\{\Pi, \rhd\Pi\} \to \rhd B]}}{\bigwedge\{\Pi, \rhd\Pi, \rhd\rhd\Pi\} \to \rhd B}}{\bigwedge\{\Pi, \rhd\Pi\} \to \rhd B}$$

(5) $\Rightarrow$ (1) На $W^\Gamma_{\mathcal{L}}$ введем рефлексивное транзитивное отношение:

$$\langle 3^\rhd_{\mathbf{S4}} \rangle \quad w{\uparrow}x \;\leftrightharpoons\; \forall C \in \mathbf{Fm}^\rhd. \quad \rhd C \in \langle w| \Rightarrow \rhd C \in \langle x| \;\&\; \begin{cases} C \in \langle w| \Rightarrow C \in \langle x|, \\ C \in |w\rangle \Rightarrow C \in |x\rangle. \end{cases}$$

В доказательстве $\langle 2^\rhd \rangle$ имеем $\mathcal{L} \nvdash B, \Pi, \rhd(\Pi\Lambda) \Rightarrow \Lambda$, иначе по правилу $(\Rightarrow^{\rhd 0}_{\mathbf{S4}})$ получим $\mathcal{L} \vdash w$. Для такого $x \in W^\Gamma_{\mathcal{L}}$, что $\Pi, \rhd(\Pi\Lambda) \subseteq \langle x|$ и $\Lambda \subseteq |x\rangle$ очевидно, что $w{\uparrow}x$.

<u>**Логика B.**</u> (2) $\Rightarrow$ (3) Обозначая $\Omega := \neg\Sigma$ и используя выводимые в $\mathbf{B}^\rhd$ формулы $p \to (\rhd p \to p)$ и $p \to \rhd(\rhd p \to p)$, строим вывод в $\mathbf{B}^\rhd$:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\bigwedge\Pi \to \bigvee\{(\rhd\Sigma \,\&\, \Sigma), B\}}{\bigwedge\{\Pi, (\rhd\Omega \to \Omega)\} \to B}}{\bigwedge\{\Pi, \rhd\Pi, (\rhd\Omega \to \Omega), \rhd(\rhd\Omega \to \Omega)\} \to \rhd B}}{\bigwedge\{\Pi, \rhd\Pi, \Omega\} \to \rhd B}}{\bigwedge\{\Pi, \rhd\Pi\} \to \bigvee\{\Sigma, \rhd B\}}$$

(3) $\Rightarrow$ (4) Выведем $\rhd$-перевод аксиомы $(\mathsf{A}^\rhd_{\mathbf{B}})$ в логике **B**.

$$\mathbf{B} \vdash p \longrightarrow \Box\Diamond p \longleftrightarrow \Box[\Diamond p \,\&\, (\neg p \to \Diamond\neg p)] \longleftrightarrow$$
$$\longleftrightarrow \Box[p \vee (\Diamond p \,\&\, \Diamond\neg p)] \longleftrightarrow \Box(p \vee \neg\rhd p) \longrightarrow \rhd(\rhd p \to p).$$

(5) $\Rightarrow$ (1) На $W^\Gamma_{\mathcal{L}}$ сначала введем рефлексивное отношение $\uparrow$ условием $\langle 3^\rhd_{\mathbf{T}} \rangle$, а затем возьмем его симметризацию:

$$\langle 3^\rhd_{\mathbf{B}} \rangle \qquad w{\Uparrow}x \;\leftrightharpoons\; (w{\uparrow}x) \,\&\, (x{\uparrow}w).$$

Для доказательства $\langle 2^{\triangleright}\rangle$ берем Π и Λ как выше, а также

$$\begin{aligned}\Sigma\ &:= \{C\in|w\rangle \bigm| \triangleright C\in|w\rangle\},\\ \Sigma' &:= \{C\in\langle w| \bigm| \triangleright C\in|w\rangle\}.\end{aligned}$$

Существует такое разбиение $\Sigma=\Phi\Psi$, $\Sigma'=\Phi'\Psi'$, что $\mathcal{L}\nvdash B,\Pi,\Phi'\Rightarrow\Phi,\triangleright(\Psi'\Psi),\Lambda$, иначе исходя из всевозможных секвенций такого вида по правилу $(\Rightarrow^{\triangleright 0}_{\mathbf{B}})$ мы бы вывели[3] секвенцию $\Pi,\triangleright(\Pi\Lambda),\Sigma'\Rightarrow\Sigma,\Lambda,\triangleright B$ и далее ослаблением $\mathcal{L}\vdash w$.

Осталось для такого $x\in W^{\Gamma}_{\mathcal{L}}$, что $\Pi\Phi'\subseteq\langle x|$ и $\Phi,\triangleright(\Psi'\Psi),\Lambda\subseteq|x\rangle$, проверить $w\Uparrow x$. Заметим, что $x\subseteq w$. Условие $w\uparrow x$ проверяется как в случае логики $\mathbf{T}$. Докажем $x\uparrow w$. Пусть $\triangleright C\in\langle x|$. Тогда $\triangleright C\in w$ ввиду $x\subseteq w$, и $C\in w$ в силу замкнутости w.

Далее, пусть $C\in\langle x|$. Если бы $C\in|w\rangle$, то возможны случаи:

1) $\triangleright C\in\langle w|$, тогда $C\in\Lambda\subseteq|x\rangle$, что не так;

2) $\triangleright C\in|w\rangle$, тогда $C\in\Sigma=\Phi\Psi$ и мы имеем: если $C\in\Phi$, то $C\in|x\rangle$, что неверно; если же $C\in\Psi$, то $\triangleright C\in\triangleright\Psi\subseteq|x\rangle$, что тоже неверно.

Теперь пусть $C\in|x\rangle$. Если бы $C\in\langle w|$, то возможны случаи:

1) $\triangleright C\in\langle w|$, тогда $C\in\Pi\subseteq\langle x|$, что не так;

2) $\triangleright C\in|w\rangle$, тогда $C\in\Sigma'=\Phi'\Psi'$ и мы имеем: если $C\in\Phi'$, то $C\in\langle x|$, что неверно; если же $C\in\Psi'$, то $\triangleright C\in\triangleright\Psi'\subseteq|x\rangle$, что тоже неверно.

Логика S5. (2) $\Rightarrow$ (3) Строим вывод в $\mathbf{S5}^{\triangleright}$:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\bigwedge\{\Pi,\triangleright\Pi,\neg\triangleright\Sigma\}\to B}{\bigwedge\{\Pi,\triangleright\Pi,\neg\triangleright\Sigma\}\to[\triangleright\bigwedge\{\Pi,\triangleright\Pi,\neg\triangleright\Sigma\}\to\triangleright B]}}{\bigwedge\{\Pi,\triangleright\Pi,\neg\triangleright\Sigma,\triangleright\triangleright\Pi,\triangleright\neg\triangleright\Sigma\}\to\triangleright B}}{\bigwedge\{\Pi,\triangleright\Pi,\neg\triangleright\Sigma\}\to\triangleright B}$$

(5) $\Rightarrow$ (1) На $W^{\Gamma}_{\mathcal{L}}$ сначала введем рефлексивное транзитивное отношение $\uparrow$ условием $\langle 3^{\triangleright}_{\mathbf{S4}}\rangle$, а затем возьмем его симметризацию:

$$\langle 3^{\triangleright}_{\mathbf{S5}}\rangle \qquad w\Uparrow x \ \leftrightharpoons\ (w\uparrow x)\,\&\,(x\uparrow w).$$

Для доказательства $\langle 2^{\triangleright}\rangle$ возьмем $\Sigma:=\{C \bigm| \triangleright C\in|w\rangle\}$, а также Π и Λ как выше. Если бы $\mathcal{L}\vdash B,\Pi,\triangleright(\Pi\Lambda)\Rightarrow\Lambda,\triangleright\Sigma$, то по правилу $(\Rightarrow^{\triangleright 0}_{\mathbf{S5}})$ мы бы вывели $\mathcal{L}\vdash w$. Осталось для такого $x\in W^{\Gamma}_{\mathcal{L}}$, что $\Pi,\triangleright(\Pi\Lambda)\subseteq\langle x|$ и $\Lambda,\triangleright\Sigma\subseteq|x\rangle$, проверить $w\Uparrow x$. Заметим, что $x\subseteq w$.

Докажем, что $w\uparrow x$. Если $\triangleright C\in\langle w|$, то $C\in\Pi\Lambda$ и $\triangleright C\in\langle x|$. Далее если $C\in\langle w|$, то $C\in\Pi\subseteq\langle x|$. Если же $C\in|w\rangle$, то $C\in\Lambda\subseteq|x\rangle$.

Докажем, что $x\uparrow w$. Пусть $\triangleright C\in\langle x|$. Тогда $\triangleright C\in w$ ввиду $x\subseteq w$, и если бы $\triangleright C\in|w\rangle$, то $C\in\Sigma$ и $\triangleright C\in|x\rangle$, что не так; значит, $\triangleright C\in\langle w|$. Далее, если $C\in\langle x|$, то $C\in w$, и если бы $C\in|w\rangle$, то ввиду доказанного включения $\triangleright C\in\langle w|$ имеем $C\in\Lambda\subseteq|x\rangle$, что не так; поэтому $C\in\langle w|$. Если же $C\in|x\rangle$, то $C\in w$, и если бы $C\in\langle w|$, то ввиду $\triangleright C\in\langle w|$ имеем $C\in\Pi\subseteq\langle x|$, что неверно; поэтому $C\in|w\rangle$.

---

[3] Если в этом применении правила $(\Rightarrow^{\triangleright 0}_{\mathbf{B}})$ мы могли бы ограничиться условием $\Sigma\Sigma'\subseteq\mathrm{Sb}(\Pi\Lambda B)$, то было бы установлено свойство подформульности для $[\mathbf{B}^{\triangleright}_{2}]$.

__Логика Grz.__

(2) $\Rightarrow$ (3) Выводим в $\mathbf{Grz}^{\triangleright}$, используя аксиому ($\mathsf{A}_{\mathbf{4}}^{\triangleright}$) на последнем шаге.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\bigwedge\{\Pi,\triangleright\Pi\}\to(\triangleright(B\to\triangleright B)\to B)}{\bigwedge\{\Pi,\triangleright\Pi\}\to[\triangleright\bigwedge\{\Pi,\triangleright\Pi\}\to\triangleright(\triangleright(B\to\triangleright B)\to B)]}}{\bigwedge\{\Pi,\triangleright\Pi,\triangleright\triangleright\Pi\}\to\triangleright B}}{\bigwedge\{\Pi,\triangleright\Pi\}\to\triangleright B}$$

(3) $\Rightarrow$ (4) Докажем $\triangleright$-перевод аксиомы ($\mathsf{A}_{\mathbf{G}}^{\triangleright}$) в **Grz**. С одной стороны: $\mathbf{Grz}\vdash\Box p\to p$, и потому $\mathbf{Grz}\vdash(p\to\triangleright p)\longleftrightarrow(p\to\Box p)$. Отсюда:
$\mathbf{Grz}\vdash\Box\neg(p\to\triangleright p)\longleftrightarrow\Box\neg(p\to\Box p)\longleftrightarrow$
$[\Box p\,\&\,\Box\neg\Box p]\longleftrightarrow\neg[\Box p\to\Diamond\Box p]\longleftrightarrow\bot.$
Тогда выводим в **Grz**:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Box[\Box(p\to\Box p)\to p]\to p}{\Box[\Box(p\to\triangleright p)\vee\bot\to p]\to p}}{\Box[\Box(p\to\triangleright p)\vee\Box\neg(p\to\triangleright p)\to p]\to p}}{\Box[\triangleright(p\to\triangleright p)\to p]\to p}}{\Box[\triangleright(p\to\triangleright p)\to p]\to\Box p}$$

С другой стороны:
$\mathbf{Grz}\vdash\Box\neg[\triangleright(p\to\triangleright p)\to p]\longleftrightarrow[\Box\triangleright(p\to\triangleright p)\,\&\,\Box\neg p]\longrightarrow\Box\neg p\longrightarrow\triangleright p.$

(5) $\Rightarrow$ (1) Несколько модифицируем метод доказательства, описанный в § 3. Допустим, $\mathcal{L}\nvdash\Pi\Rightarrow\Sigma$. Возьмем $\Gamma:=\mathrm{Sb}\,\Pi\Sigma$,

$$\widehat{\Gamma}:=\Gamma\cup\mathrm{Sb}\{\triangleright(A\to\triangleright A),\triangleright(A\vee\triangleright A)\mid\triangleright A\in\Gamma\}.$$

Множество $W_{\mathcal{L}}^{\Gamma}:=\{w\mid w$ есть замкнутая тонкая секвенция, $\langle w|\subseteq\widehat{\Gamma}$, $|w\rangle\subseteq\Gamma$, $\mathcal{L}\nvdash w\}$ конечно.

Лемма 4.3 (О замыкании) *Всякую невыводимую в $\mathcal{L}$ секвенцию $\Pi\Rightarrow\Sigma$, такую, что $\Pi\subseteq\widehat{\Gamma}$ и $\Sigma\subseteq\Gamma$, можно расширить до секвенции из $W_{\mathcal{L}}^{\Gamma}$. Формально, если $\mathcal{L}\nvdash\Pi\Rightarrow\Sigma$, причем $\Pi\subseteq\widehat{\Gamma}$ и $\Sigma\subseteq\Gamma$, то $\exists w\in W_{\mathcal{L}}^{\Gamma}$: $\Pi\subseteq\langle w|$, $\Sigma\subseteq|w\rangle$.*

▶ В дополнение к доказательству леммы 3.2 надо проверить, что если в процессе замыкания секвенция $\Pi'\Rightarrow\Sigma'$, невыводимая в $\mathcal{L}$, получена из $\Pi\Rightarrow\Sigma$ добавлением формулы $A\in\mathrm{Sb}\,\Pi\Sigma$, $A\notin\Pi\Sigma$, в антецедент или сукцедент, то $\Pi'\subseteq\widehat{\Gamma}$ и $\Sigma'\subseteq\Gamma$. Первое включение очевидно. При $A\in\Gamma$ второе тоже очевидно. Если же $A\in(\widehat{\Gamma}\setminus\Gamma)$, то ввиду $A\notin\Pi\Sigma$ формула A есть либо $(B\vee\triangleright B)$, либо $(B\to\triangleright B)$ для некоторой $\triangleright B\in\Pi\Sigma$, причем $\triangleright A\in\Pi$. В обоих случаях $\mathcal{L}\vdash\triangleright A\Rightarrow A$, что следует из леммы 2.3 (б,в), и значит, $\mathcal{L}\vdash\Pi\Rightarrow\Sigma A$. Поэтому формула A не могла быть добавлена в сукцедент секвенции $\Pi\Rightarrow\Sigma$, и следовательно, $\Sigma'=\Sigma\subseteq\Gamma$. ◀

Как и ранее, для любых $w\in W_{\mathcal{L}}^{\Gamma}$ и $p\in\mathbb{P}$ положим $w\models p\leftrightharpoons p\in\langle w|$. Формулировка и доказательство лемм 3.3 и 3.4 переносятся на наш случай без существенных изменений. На $W_{\mathcal{L}}^{\Gamma}$ введем сначала транзитивное отношение $\uparrow$ условием $\langle 3_{\mathbf{S4}}^{\triangleright}\rangle$, далее иррефлексивное транзитивное отношение:

$\langle 3_{\mathbf{Grz}}^{\triangleright}\rangle$ $\qquad w\prec x\ \leftrightharpoons\ (w{\uparrow}x)\,\&\,\Big(\exists C\in\mathbf{Fm}^{\triangleright}\colon\quad\triangleright C\notin\langle w|\,\&\,\triangleright C\in\langle x|\Big),$

и, наконец, рефлексивное транзитивное антисимметричное отношение, т. е. частичный порядок $w \preccurlyeq x \leftrightharpoons (w \prec x) \vee (w = x)$. Построена конечная **Grz**-шкала $F^{\Gamma}_{\mathcal{L}} := (W^{\Gamma}_{\mathcal{L}}, \preccurlyeq)$. Осталось проверить условие $\langle 2^{\triangleright} \rangle$, имеющее теперь вид:

$$\langle 2^{\triangleright} \rangle \qquad \forall w \in W^{\Gamma}_{\mathcal{L}}\ \forall \triangleright B \in w. \qquad \triangleright B \in \langle w| \ \Leftrightarrow \ \left[\begin{array}{ll} \forall x \succcurlyeq w & B \in \langle x|, \\ \forall x \succcurlyeq w & B \in |x\rangle. \end{array} \right.$$

Лемма 4.3.1 $\langle 3^{\triangleright}_{\mathbf{Grz}} \rangle \Rightarrow \langle 2^{\triangleright} \rangle$.

▶ Докажем эквивалентность в $\langle 2^{\triangleright} \rangle$. Возьмем любые $w \in W^{\Gamma}_{\mathcal{L}}$ и $\triangleright B \in w$.

($\Rightarrow$) Пусть $\triangleright B \in \langle w|$. Возможны два случая:

1) $B \in \langle w|$, тогда $\forall x \succcurlyeq w$ имеем: либо $w \prec x$, $w \uparrow x$ и $B \in \langle x|$ по $\langle 3^{\triangleright}_{\mathbf{S4}} \rangle$, либо $x = w$ и $B \in \langle w| = \langle x|$.

2) $B \in |w\rangle$. Аналогично $\forall x \succcurlyeq w$ получаем $B \in |x\rangle$.

($\Leftarrow$) Пусть $\triangleright B \in |w\rangle$. Возьмем Π, Λ как в доказательстве леммы 4.2.

Случай $B \in |w\rangle$**.** Положим $y := w$. Далее имеем:

$$\mathcal{L} \nvdash B, \triangleright(B \vee \triangleright B), \Pi, \triangleright(\Pi\Lambda) \Rightarrow \Lambda,$$

иначе по правилу $(\Rightarrow^{\triangleright 0}_{\mathbf{Grz}})$ и правилам ослабления получим $\mathcal{L} \vdash w$. Поскольку $\triangleright B \in |w\rangle \subseteq \Gamma$, антецедент выписанной секвенции содержится в $\widehat{\Gamma}$, а сукцедент в Γ. По лемме о замыкании эту секвенцию можно погрузить в некоторую секвенцию $x \in W^{\Gamma}_{\mathcal{L}}$. Остается проверить $w \prec x$. Условие $w \uparrow x$ проверяется как в случае логики **S4**. Далее $\triangleright(B \vee \triangleright B) \in \langle x|$. Но $\triangleright(B \vee \triangleright B) \notin \langle w|$, иначе, учитывая $B, \triangleright B \in |w\rangle$, мы в силу леммы 2.3 (в) получим даже $[\mathbf{T}^{\triangleright}_{2}]^{-} \vdash w$.

Случай $B \in \langle w|$**.** Теперь $x := w$, и аналогично имеем:

$$\mathcal{L} \nvdash \triangleright(B \to \triangleright B), \Pi, \triangleright(\Pi\Lambda) \Rightarrow \Lambda, B.$$

Как и выше, погружаем эту секвенцию в некоторый $y \in W^{\Gamma}_{\mathcal{L}}$. Очевидно, $w \uparrow y$. Наконец, $w \prec y$, поскольку $\triangleright(B \to \triangleright B) \in \langle y|$, но $\triangleright(B \to \triangleright B) \notin \langle w|$ ввиду леммы 2.3 (б). ◀

Теорема полностью доказана. ⊣

Напомним, что в присутствии рефлексивности оператор $\Box$ выражается через $\triangleright$ посредством равенства $\Box p = p \,\&\, \triangleright p$. Исходя из этого, введем перевод $\mathsf{Tr}\colon \mathbf{Fm}^{\Box} \to \mathbf{Fm}^{\triangleright}$, сохраняющий переменные и булевы связки, а на формулах вида $\Box A$ действующий следующим образом: $\mathsf{Tr}(\Box A) = \mathsf{Tr}(A) \& \triangleright \mathsf{Tr}(A)$. Далее, для произвольной $\triangleright$-логики M обозначим

$$M^{\Box} := \{A \in \mathbf{Fm}^{\Box} \mid \mathsf{Tr}(A) \in M\} = \mathsf{Tr}^{-1}(M).$$

Легко видеть, что переводы tr и Tr взаимно обратны в следующем смысле: $\mathbf{T} \vdash \mathsf{tr}(\mathsf{Tr}(\Box p)) \leftrightarrow \Box p$ и $\mathbf{T}^{\triangleright} \vdash \mathsf{Tr}(\mathsf{tr}(\triangleright p)) \leftrightarrow \triangleright p$. Как следствие, $(L^{\triangleright})^{\Box} = L$ для любой $\Box$-логики L, содержащей аксиому $(\mathsf{A}^{\Box}_{\mathbf{T}})$, а также $(M^{\Box})^{\triangleright} = M$ для любой $\triangleright$-логики M, содержащей аксиому $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\neg})$. Отсюда вытекает, что условие $L^{\triangleright} = M$ равносильно конъюнкции условий $[M \subseteq L^{\triangleright}$ и $L \subseteq M^{\Box}]$. Последнее утверждение позволяет строить аксиоматику логики разрешимости над любой нормальной логикой, содержащей $\mathbf{T}$.

Лемма 4.4 *Пусть нормальная логика L аксиоматизирована над* $\mathbf{T}$ *множеством аксиом* $\Gamma \subseteq \mathbf{Fm}^{\Box}$. *Тогда логика разрешимости над* L *имеет следующую аксиоматику:* $L^{\rhd} = \mathbf{T}^{\rhd} + \mathsf{Tr}(\Gamma)$, *где* $\mathsf{Tr}(\Gamma) := \{\mathsf{Tr}(A) \mid A \in \Gamma\}$.

Применяя эту лемму, легко проверить, что $\mathbf{S4.1}^{\rhd} = \mathbf{S4}^{\rhd} + (\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{1}})$, где аксиома: $(\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{1}}) \quad \rhd\rhd p \to \rhd p$. Наконец, покажем, что переход $L \mapsto L^{\rhd}$ является инъективным гомоморфизмом решетки (по включению) расширений логики $\mathbf{T}$.

Лемма 4.5 *Если* $\Box$*-логики* L, M *содержат* $\mathbf{T}$, *то:* $L \subset M \Leftrightarrow L^{\rhd} \subset M^{\rhd}$.

Доказательство. Достаточно проверить сохранение нестрогого включения. Из $L \subseteq M$ следует $L^{\rhd} \subseteq M^{\rhd}$. Обратно, если $L^{\rhd} \subseteq M^{\rhd}$, то $L = (L^{\rhd})^{\boxdot} \subseteq (M^{\rhd})^{\boxdot} = M$. $\dashv$

§ 5. Неустранимость сечения и интерполяция

Здесь мы установим, что во построенных в § 2 секвенциальных исчислениях $[L^{\rhd}_{\kappa}]$ сечение не устранимо, но в то же время логики $L^{\rhd}$ обладают интерполяционным свойством Крейга.

Теорема 5.1 *В исчислениях* $[L^{\rhd}_{\kappa}]$, *где* $L \in \{\mathbf{T}, \mathbf{S4}, \mathbf{B}, \mathbf{S5}, \mathbf{Grz}\}$, $\kappa = 1, 2$, *сечение не устранимо.*

Доказательство. **1)** Секвенция $\rhd(p \to \rhd p), p \Rightarrow \rhd p$ выводима в $[\mathbf{T}^{\rhd}_2]^-$ (см. лемму 2.3 (б)), а значит и во всех рассматриваемых исчислениях $[L^{\rhd}_{\kappa}]$. Покажем, что она не выводима без сечения в $[\mathbf{B}^{\rhd}_1]$ и в $[L^{\rhd}_{\kappa}]$ при $L \neq \mathbf{B}$.

Допустим, существует ее вывод без сечений в одном из этих исчислений. Последним применением неструктурного правила в этом выводе могло быть только применение одного из правил $(^{\rhd}_{\neg}\Rightarrow)$, $(\Rightarrow^{\rhd}_{\neg})$, $(\Rightarrow^{\rhd}_{L})$ или $(\Rightarrow^{\rhd r}_{L})$, при этом первые два исключаются сразу, ибо формулы вида $\rhd\neg A$ наследуются в выводах без сечений, а в нашей секвенции нет таких формул или подформул. Заключение этого применения должно иметь вид:

$$[\rhd(p \to \rhd p)]^{\ell}, [p]^m \Rightarrow [\rhd p]^n, \quad \ell, m, n \geqslant 0,$$

поскольку далее в этом выводе применялись лишь правила ослабления и сокращения. Легко видеть, что заключения рассматриваемых правил $(\Rightarrow^{\rhd}_{L})$ и $(\Rightarrow^{\rhd r}_{L})$ могут иметь данный вид лишь при $\ell = m = 0$ и $n > 0$. Однако из семантических соображений (используя доказанную теорему о полноте) ясно, что секвенция $\Rightarrow [\rhd p]^n$ не выводима в рассматриваемых исчислениях.

2) Покажем, что секвенция $\rhd p \Rightarrow \rhd\neg p$ выводима даже в $[\mathbf{T}^{\rhd}_2]^-$, но не выводима в $[\mathbf{B}^{\rhd}_2]$ без сечений. Имеем вывод в $[\mathbf{T}^{\rhd}_2]^-$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \Rightarrow p}{\Rightarrow p, \neg p}}{\rhd p \Rightarrow p, \rhd\neg p} \qquad \dfrac{\dfrac{p \Rightarrow p}{p, \neg p \Rightarrow}}{p, \rhd p \Rightarrow \rhd\neg p}}{\rhd p \Rightarrow \rhd\neg p}$$

Допустим, существует ее вывод без сечений в $[\mathbf{B}_2^{\triangleright}]$. Последним применением неструктурного правила в этом выводе могло быть только применение правила $(\Rightarrow^{\triangleright r}_{\mathbf{B}})$. Его заключение имеет вид: $[\triangleright p]^m \Rightarrow [\triangleright\neg p]^n$, где $m, n \geqslant 0$. Сопоставляя эту секвенцию с обозначениями из формулировки правила $(\Rightarrow^{\triangleright r}_{\mathbf{B}})$, имеем: $\Pi = \Lambda = \varnothing$, $\Sigma' = [\triangleright p]^m$, $\Sigma = [\triangleright\neg p]^{n-1}$. Посылка этого применения, отвечающая разбиению $\Phi = \Phi' = \varnothing$, $\Psi = \Sigma$ и $\Psi' = \Sigma'$, будет иметь вид: $p^{\overline{r}} \Rightarrow p^r, [\triangleright\triangleright p]^m, [\triangleright\triangleright\neg p]^n$, где $r \in \{0,1\}$. Покажем, что последняя секвенция не выводима в $[\mathbf{B}_2^{\triangleright}]$. В противном случае по теореме о полноте $\mathbf{B}^{\triangleright} \vdash p^{\overline{r}} \to (p^r \vee \triangleright\triangleright p \vee \triangleright\triangleright\neg p)$. Пусть $r = 0$ (случай $r = 1$ рассматривается аналогично). Тогда по аксиоме $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\neg})$ и правилу (RE) получаем $\mathbf{B}^{\triangleright} \vdash p \to \triangleright\triangleright p$. Подставив $\neg p$ вместо p, мы выведем $\mathbf{B}^{\triangleright} \vdash \neg p \to \triangleright\triangleright p$. Отсюда $\mathbf{B}^{\triangleright} \vdash \triangleright\triangleright p$, то есть $\mathbf{B}^{\triangleright} = \mathbf{S5}^{\triangleright}$, но по лемме 4.5 включение $\mathbf{B}^{\triangleright} \subset \mathbf{S5}^{\triangleright}$ является строгим. $\dashv$

Определение 5.2 Логика L обладает (*интерполяционным*) *свойством Крейга*, если из $L \vdash A \to C$ следует существование такой формулы B (*интерполянта*), что $L \vdash A \to B$, $L \vdash B \to C$ и $\mathrm{Var}\, B \subseteq (\mathrm{Var}\, A \cap \mathrm{Var}\, C)$.

Лемма 5.3 *Логика $L \subseteq \mathbf{Fm}^{\Box}$, содержащая $\mathbf{T}$, обладает свойством Крейга $\Longleftrightarrow$ логика $L^{\triangleright}$ обладает им.*

Доказательство. $(\Rightarrow)$ Воспользуемся очевидной выводимостью: $\mathbf{T} \vdash A \leftrightarrow \mathsf{tr}(\mathsf{Tr}(A))$ для всякой $\Box$-формулы A. Пусть $L^{\triangleright} \vdash A \to C$, то есть $L \vdash \mathsf{tr}(A) \to \mathsf{tr}(C)$. По свойству Крейга для L имеем: $\exists B \in \mathbf{Fm}^{\Box}$: $\mathrm{Var}\, B \subseteq (\mathrm{Var}\, A \cap \mathrm{Var}\, C)$, $L \vdash \mathsf{tr}(A) \to B$, $B \to \mathsf{tr}(C)$. Тогда $L \vdash \mathsf{tr}(A) \to \mathsf{tr}(\mathsf{Tr}(B))$, $\mathsf{tr}(\mathsf{Tr}(B)) \to \mathsf{tr}(C)$. Отсюда $L^{\triangleright} \vdash A \to \mathsf{Tr}(B)$, $\mathsf{Tr}(B) \to C$. Таким образом, $\mathsf{Tr}(B)$ является интерполянтом $A \to C$ в $L^{\triangleright}$.

$(\Leftarrow)$ Провести те же рассуждения, поменяв ролями переводы Tr и tr. $\dashv$

Следствие 5.4 *Логики $L^{\triangleright}$, $L \in \{\mathbf{T}, \mathbf{S4}, \mathbf{B}, \mathbf{S5}, \mathbf{Grz}, \mathbf{S4.1}\}$, обладают интерполяционным свойством Крейга.*

Доказательство. Следует из известного (см. [17, 14]) свойства Крейга для L и леммы 5.3. $\dashv$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований. Автор благодарит проф. С. Н. Артёмова за помощь при изучении данной темы, а также В. Б. Шехтмана за интерес к работе и полезные дискуссии.

Список цитированной литературы

[1] A. P. Brogan, Aristotle's logic of statements about contingency, *Mind*, vol. 76 (1967), pp. 49–81.

[2] Montgomery H., Routley R., Contingency and non-contingency bases for normal modal logics, *Logique et Analyse*, vol. 9 (1966), pp. 318–328.

[3] Montgomery H., Routley R., Noncontingency axioms for $S4$ and $S5$, *Logique et Analyse*, vol. 11 (1968), pp. 422–424.

[4] Montgomery H., Routley R., Modalities is a sequence of normal non-contingency modal systems, *Logique et Analyse*, vol. 12 (1969), pp. 225–227.

[5] Mortensen C., A sequence of normal modal systems with non-contingency bases, *Logique et Analyse*, vol. 19 (1976), pp. 341–344.

[6] Cresswell M. J., Necessity and contingency, *Studia Logica*, vol. 47 (1988), pp. 145–149.

[7] Humberstone I. L., The logic of non-contingency, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 1995, 36(2):214–229.

[8] Kuhn S. T., Minimal non-contingency logic, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 1995, 36(2):230–234.

[9] Zolin E., Completeness and Definability in the Logic of Non-contingency, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 2000, to appear.

[10] Золин Е., Секвенциальная логика арифметической разрешимости // Вестн. Моск. Ун-та. Серия 1. Математика. Механика. 2001. № 4. С.

[11] Минц Г. Е., Системы Льюиса и система T (1965–1973). — В кн.: Р. Фейс, Модальная логика. М.: Наука, 1974, с. 423–509.

[12] Ohnishi M., Matsumoto K., Gentzen method in modal calculi, *Osaka Math. J.*, vol. 9 (1957), num. 2, pp. 113–130. (Correction: *Osaka Math. J.*, vol. 10 (1958), num. 1, p. 147.)

[13] Ohnishi M., Matsumoto K., Gentzen method in modal calculi II, *Osaka Math. J.*, vol. 11 (1959), num. 2, pp. 115–120.

[14] Takano M., Subformula property as a substitute for cut elimination in modal propositional logics, *Mathematica Japonica*, vol. 37 (1992), num. 6, pp. 1129–1145.

[15] Smullyan R. M., Analytic cut, *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 33 (1968), pp. 560–564.

[16] Boolos G., *The Logic of Provability.* Cambridge University Press, 1993.

[17] Chagrov A., Zakharyaschev M., *Modal Logic.* Oxford Science Publications, 1997.