МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи
УДК 510.643, 510.23

Золин Евгений Евгеньевич

МОДАЛЬНЫЕ ЛОГИКИ
С ОПЕРАТОРОМ РАЗРЕШИМОСТИ

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научные руководители:
доктор физико-математических наук,
профессор С. Н. Артёмов,
доктор физико-математических наук,
профессор В. А. Успенский

Москва — 2002

Оглавление

Введение

Актуальность темы. При построении логических исчислений в модальной логике традиционным стал выбор языка с операторами необходимости $\Box$ и возможности $\Diamond$. Однако определенный технический и философский интерес (см. [22]) представляют системы, где в качестве базисного выбирается оператор *разрешимости* (или *неслучайности*[1]), подразумеваемая семантика которого определяется равенством $\rhd A = \Box A \vee \Box\neg A$. Это равенство задает перевод $\rhd$-формул (т. е. формул модального языка с единственным модальным оператором $\rhd$, или $\rhd$-языка) в $\Box$-формулы (определяемые аналогично). Теперь, если задана $\Box$-логика L (т. е. логика в $\Box$-языке), то *логикой разрешимости* над L (обозначаемой посредством $L^{\rhd}$) называется множество $\rhd$-формул, переводы которых являются теоремами логики L.

В работах [22, 23] были предложены различные аксиоматики логик разрешимости над известными нормальными логиками **T**, **S4** и **S5** (определения которых см. ниже). Некоторые семейства логик разрешимости в интервале между $\mathbf{T}^{\rhd}$ и $\mathbf{S5}^{\rhd}$ изучались в работах [24, 25]. Отметим, что в случае когда логика L содержит **T**, а точнее, аксиому рефлексивности $\Box A \to A$, исследование логики разрешимости над L упрощается благодаря тому, что оператор $\Box$ вырази́м через $\rhd$ посредством равенства $\Box A = A \mathbin{\&} \rhd A$. Аналогичная картина наблюдается в логике **Ver**, имеющей

[1] Термин „неслучайность“ (non-contingency) принят в англоязычной литературе; мы будем употреблять термин „разрешимость“, происходящий из рассмотрения доказуемостной интерпретации оператора $\Box$ (предложение *разрешимо* в теории, если в ней доказуемо либо оно, либо его отрицание).

в числе своих теорем все формулы вида $\Box A$: в этой логике $\Box$ выражается через $\rhd$ посредством тривиального равенства $\Box A = \top$. В статье [13] построен нетривиальный пример логики, не содержащей **T** и отличной от **Ver**, в которой тем не менее $\Box$ вырази́м через $\rhd$.

Систематичное изучение логики разрешимости было начато в работе [17], содержащей первую, достаточно громоздкую аксиоматику минимальной логики разрешимости (т. е. логики $\mathbf{K}^{\rhd}$). В последующей работе [19] эта аксиоматика была упрощена, а также была аксиоматизирована логика разрешимости над **K4**.

Определенный интерес к изучению модальной логики связан с возможностью использовать ее в качестве инструмента исследования понятия формальной доказуемости. Эти исследования восходят к работам И. Орлова [6] и К. Гёделя [15]. Формулировка „правильной“ логики доказуемости в арифметике Пеано, известной сейчас как логика Гёделя–Лёба **GL**, появилась позднее в работе М. Лёба [20], а первое доказательство арифметической полноты логики **GL** принадлежит Р. Соловэю [30].

Логика Гёделя–Лёба **GL** является наименьшей по включению логикой доказуемости. Она описывает модальные законы, которым подчиняется предикат доказуемости в „объектной“ теории **PA** с точки зрения „метатеории“ **PA**. Если же варьировать „метатеорию“ в классе расширений **PA**, а „объектную“ теорию — в классе перечислимых расширений **PA**, то получится семейство *логик доказуемости* (имеющее мощность континуума), полностью описанное Л. Д. Беклемишевым (см. [1], формальное определение логики доказуемости см. там же).

Наряду с доказуемостью, понятие разрешимости в формальной теории является одним из центральных в теории доказательств. Так, первая теорема Гёделя о неполноте утверждает, что существуют неразрешимые в **PA** предложения. Нам удалось аксиоматизировать лишь минимальную логику арифметической разрешимости — логику $\mathbf{GL}^{\rhd}$. Естественным образом возникает интересная проблема описания многообразия всех пропозициональных логик арифметической разрешимости, аналогичная упомянутой выше.

Другим аспектом, объясняющим интерес к модальной логике, являются выразительные возможности ее языка, с точки зрения, например, семантики Крипке. Известно (см. [11, 10]), что, с одной стороны, модальный язык не сравним по выразительным возможностям с языком первого порядка, а с другой, он вкладывается в язык второго порядка.

Поскольку имеется естественное вложение языка с оператором разрешимости в язык с оператором необходимости, выразительные возможности первого не больше, чем последнего. В статье [17] было обнаружено, что они даже существенно меньше: известные классы шкал, определимые в $\Box$-языке, такие как классы рефлексивных, сериальных, транзитивных, симметричных, евклидовых шкал, оказываются не определимыми в $\rhd$-языке. В настоящее время вопрос о точных границах выразительных возможностей $\rhd$-языка мало изучен; ему посвящена последняя глава настоящей работы.

Цель работы. Диссертация имеет целью разработать технику построения аксиоматических систем гильбертовского типа и секвенциальных исчислений для модальных логик с оператором разрешимости, а также исследовать выразительные возможности модального языка с оператором разрешимости.

Методы исследования. В диссертации использована техника канонических моделей для доказательства полноты систем гильбертовского типа, адаптированная для применения к логикам разрешимости в работах [17, 19], метод пополнения секвенций и его модификация — метод насыщения секвенций для доказательства полноты секвенциальных исчислений.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1) Построены гильбертовские системы для логик разрешимости над логиками **B**, **K5**, **K45**, „эпистемической“ логикой **KD45**, логикой Гжегорчика **Grz**, логикой арифметической доказуемости **GL**.

2) Построены секвенциальные исчисления (с сечением) для логик разрешимости над логиками **K**, **K4**, **GL**, а также секвенциальные исчисления с аналитическим правилом сечения для логик разрешимости над рефлексивными логиками **T**, **S4**, **B**, **S5**, **Grz**. Доказано, что последние логики обладают интерполяционным свойством Крейга.

3) Установлено, что в секвенциальных исчислениях для рефлексивных логик разрешимости сечение неустранимо; в то же время, доказано, что данные исчисления для логик разрешимости над **T**, **S4**, **S5** и **Grz** обладают (слабым в случае **Grz**) свойством подформульности.

4) Доказана определимость в элементарном языке классов шкал, задаваемых некоторыми из аксиом рассмотренных логик разрешимости.

5) Построена полная аксиоматика логик доказательств с оператором сильной разрешимости, отвечающих некоторым естественным классам предикатов доказательства в арифметике.

6) Найден инфинитарный оператор необходимости, определимый через оператор разрешимости, и изучены выразительные возможности языка с этим оператором в смысле семантики Крипке.

Теоретическая ценность. Работа носит теоретический характер. Ее методы и результаты могут быть полезны специалистам по модальной логике и теории доказательств.

Апробация. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на семинаре “Модальная и алгебраическая логика” (под руководством В. Б. Шехтмана и М. Р. Пентуса), на семинаре “Алгоритмические вопросы алгебры и логики" (под руководством проф. С. И. Адяна), и на Научно-исследовательском семинаре по математической логике механико-математического факультета МГУ (под руководством проф. С. И. Адяна и проф. В. А. Успенского), семинаре по математической логике математического факультета Тверского государственного университета (под руководством проф. А. В. Чагрова). Основные результаты диссертации содержатся в следующих публикациях автора: [2], [3], [4], [32], [33].

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения и пяти глав. Текст диссертации изложен на 104 страницах. Список литературы содержит 33 наименования.

В **первой главе** вводятся основные определения и формулируются известные факты, используемые в дальнейшем изложении.

Следующие две главы посвящены вопросам аксиоматизации логик оператора разрешимости над логиками, не содержащими аксиомы рефлексивности; в них оператор необходимости $\Box$ не выражается через оператор разрешимости $\rhd$. Во **второй главе** представлена аксиоматика гильбертовского типа логик $\mathbf{K\Sigma}^{\rhd}$, где $\mathbf{\Sigma} \subseteq \{\mathbf{D}, \mathbf{4}, \mathbf{5}\}$.

В **третьей главе** построена гильбертовская аксиоматика логики, полной при интерпретации формул вида $\rhd A$ как 'утверждение A разрешимо в **PA**', т. е. логики разрешимости над логикой Гёделя–Лёба **GL**. Кроме того, для логик разрешимости над $L \in \{\mathbf{K}, \mathbf{K4}, \mathbf{GL}\}$ построены секвенциальные исчисления $[L^{\rhd}]$.

Четвертая глава посвящена изучению логик оператора разрешимости над $\Box$-логиками, содержащими аксиому рефлексивности $\Box A \to A$, ввиду чего оператор $\Box$ выражается через $\rhd$ посредством равенства $\Box A = A \mathbin{\&} \rhd A$. В § 4.1 представлены системы гильбертовского типа $L^{\rhd}$ и секвенциальные исчисления $[L_1^{\rhd}]$ и $[L_2^{\rhd}]$ для логик разрешимости над $L \in \{$**T**, **S4**, **B**, **S5**, **Grz**$\}$ (исчисления $\mathbf{T}^{\rhd}$, $\mathbf{S4}^{\rhd}$ и $\mathbf{S5}^{\rhd}$ были известны из [22, 23]). В § 4.2 описывается метод доказательства полноты логик в $\rhd$-языке, заданных в виде секвенциального исчисления с аналитическим сечением. Доказательству полноты построенных аксиоматик посвящен § 4.3. Во всех построенных секвенциальных исчислениях сечение не устранимо, что установлено в § 4.5; в тоже время, из доказанной в § 4.3 теоремы о полноте вытекает, в частности, что для $L \in \{\mathbf{T}, \mathbf{S4}, \mathbf{S5}, \mathbf{Grz}\}$ исчисления $[L_2^{\triangleright}]$ обладают (слабым при $L = \mathbf{Grz}$) свойством подформульности, а в § 4.5 также установлено интерполяционное свойство Крейга для построенных логик $L^{\triangleright}$. Вопрос о свойстве подформульности для исчисления $[\mathbf{B}_2^{\triangleright}]$ остается открытым. В § 4.4 описан универсальный метод построения и доказательства полноты гильбертовской аксиоматики для рефлексивных логик разрешимости, использующий упомянутую выше выразимость $\Box$ через $\triangleright$. Этот метод демонстрируется на примере аксиоматизации логики $\mathbf{S4.1}^{\triangleright}$. Наконец, в § 4.6 дается полная аксиоматика логик доказательств с оператором (сильной) разрешимости, доказана их арифметическая полнота и для них решен вопрос об интерполяционном свойстве Крейга.

Пятая глава посвящена вопросам выразимости свойств шкал Крипке формулами $\triangleright$-языка. В § 5.1 мы находим „верхнюю границу" выразительных возможностей $\triangleright$-языка, устанавливая, что всякий непустой $\triangleright$-определимый класс шкал Крипке содержит класс функциональных шкал. В § 5.2 мы предъявляем формулы первого порядка, задающие те же классы шкал Крипке, что и $\triangleright$-аксиомы некоторых рассмотренных выше логик разрешимости. В § 5.3 изучается инфинитарный оператор $\boxtimes$, определяемый как $\boxtimes A = \bigwedge\limits_{B \in \mathbf{Fm}^{\triangleright}} \triangleright(B \to A)$, возникший в ходе доказательства теоремы о полноте из главы 2. Установлено, что логика $L^{\boxtimes}$ этого оператора над любой нормальной логикой L является нормальной, и для $L \in \{\mathbf{K}, \mathbf{K4}, \mathbf{K5}, \mathbf{GL}\}$ имеет место включение $L^{\boxtimes} \supseteq L$. Здесь же мы пытаемся выяснить, насколько свойства операторов $\Box$ и $\boxtimes$ близки друг к другу. Верхняя граница выразительных возможностей $\boxtimes$-языка, аналогичная упомянутой выше, найдена в § 5.4. Наконец, в заключительном § 5.5 мы приводим элементарные эквиваленты некоторых $\boxtimes$-формул и подводим итог сравнению выразительных возможностей модальных языков с операторами $\Box$, $\rhd$ и $\boxtimes$.

Пользуясь случаем, автор выражает искреннюю благодарность профессору В. А. Успенскому и профессору С. Н. Артёмову за научное руководство в процессе работы над диссертацией, старшему научному сотруднику В. Б. Шехтману и доценту В. Н. Крупскому за интерес к работе и полезные обсуждения, доценту М. Р. Пентусу за поддержку при написании текста диссертации и ценные советы. Кроме того, автор хотел бы выразить огромную признательность всем сотрудникам кафедры математической логики и теории алгоритмов МГУ за теплое отношение и рабочую атмосферу, которая сложилась на кафедре.

Глава 1.

Основные определения и факты

В этой главе мы вводим основные определения и обозначения, используемые в настоящей работе. Кроме того, будут сформулированы известные факты, на которые мы будем ссылаться в дальнейшем изложении.

Рассматривается пропозициональный модальный язык (который будем для краткости называть $\Box$-языком), алфавит которого содержит переменные $\mathrm{Var} = \{p_0, p_1, \ldots\}$, булевы связки $\bot$ (ложь), $\to$ (импликация) и одноместный модальный оператор $\Box$. Остальные связки вводятся известными сокращениями, в частности, мы полагаем: $\neg A \leftrightharpoons A \to \bot$, $\Diamond A \leftrightharpoons \neg\Box\neg A$. Множество формул этого языка ($\Box$-*формул*), определяемое стандартным образом, обозначим $\mathbf{Fm}^{\Box}$.

(*Классической модальной*) *логикой* (или $\Box$-*логикой*) называется произвольное множество $\Box$-формул, содержащее все классические тавтологии в $\Box$-языке и замкнутое относительно правил modus ponens, подстановки и эквивалентной замены:

$$(\mathsf{MP})\ \frac{A \quad A \to B}{B} \qquad (\mathsf{Sub})\ \frac{A}{A[B/p]} \qquad (\mathsf{RE}^{\Box})\ \frac{A \leftrightarrow B}{\Box A \leftrightarrow \Box B}$$

(здесь $A[B/p]$ есть формула, полученная из A подстановкой формулы B вместо всех вхождений переменной p).

Приведем формулировки гильбертовских и секвенциальных исчислений для нормальных модальных логик, рассматриваемых в дальнейшем. Минимальная нормальная модальная логика $\mathbf{K}$ задается следующим набором аксиом и правил вывода:

$(\mathsf{A}^{\Box}_{\top})$ классические тавтологии в $\Box$-языке

$(\mathsf{A}^{\Box}_{\mathbf{K}})$ $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ (дистрибутивность)

$$(\mathsf{MP})\ \frac{A \quad A \to B}{B} \qquad (\mathsf{Sub})\ \frac{A}{A[B/p]} \qquad (\mathsf{Nec})\ \frac{A}{\Box A}$$

Логика называется *нормальной*, если она содержит $\mathbf{K}$ и замкнута относительно правил (MP), (Sub) и (Nec). Остальные интересующие нас системы получаются добавлением к системе $\mathbf{K}$ дополнительных аксиом, перечисленных на рис. 1.1.

$(\mathsf{A}^{\Box}_{\mathbf{T}})$	$\Box p \to p$	(рефлексивность)
$(\mathsf{A}^{\Box}_{\mathbf{D}})$	$\Box p \to \Diamond p$	(сериальность)
$(\mathsf{A}^{\Box}_{\mathbf{B}})$	$p \to \Box\Diamond p$	(симметричность)
$(\mathsf{A}^{\Box}_{\mathbf{4}})$	$\Box p \to \Box\Box p$	(транзитивность)
$(\mathsf{A}^{\Box}_{\mathbf{5}})$	$\Diamond p \to \Box\Diamond p$	(евклидовость)
$(\mathsf{A}^{\Box}_{\mathbf{1}})$	$\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$	(аксиома Маккинси)
$(\mathsf{A}^{\Box}_{\mathbf{L}})$	$\Box(\Box p \to p) \to \Box p$	(аксиома Лёба)
$(\mathsf{A}^{\Box}_{\mathbf{G}})$	$\Box(\Box(p \to \Box p) \to p) \to p$	(аксиома Гжегорчика)

Рис. 1.1. Аксиомы нормальных логик.

Нас будут интересовать следующие нормальные модальные логики (символ '+' обозначает добавление к системе новой аксиомы):

$$\begin{aligned}
\mathbf{T} &= \mathbf{K} + (\mathsf{A}^{\Box}_{\mathbf{T}}), & \mathbf{K4} &= \mathbf{K} + (\mathsf{A}^{\Box}_{\mathbf{4}}),\\
\mathbf{D} &= \mathbf{K} + (\mathsf{A}^{\Box}_{\mathbf{D}}), & \mathbf{S4} &= \mathbf{T} + (\mathsf{A}^{\Box}_{\mathbf{4}}),\\
\mathbf{B} &= \mathbf{T} + (\mathsf{A}^{\Box}_{\mathbf{B}}), & \mathbf{S4.1} &= \mathbf{S4} + (\mathsf{A}^{\Box}_{\mathbf{1}}),\\
\mathbf{GL} &= \mathbf{K} + (\mathsf{A}^{\Box}_{\mathbf{L}}), & \mathbf{Grz} &= \mathbf{K} + (\mathsf{A}^{\Box}_{\mathbf{G}}),
\end{aligned}$$

$$\mathbf{S5} = \mathbf{T} + (\mathsf{A}^{\Box}_{\mathbf{5}}) = \mathbf{T} + (\mathsf{A}^{\Box}_{\mathbf{4}}) + (\mathsf{A}^{\Box}_{\mathbf{B}}).$$

Далее, для $\mathbf{\Sigma} \subseteq \{\mathbf{D}, \mathbf{4}, \mathbf{5}\}$ обозначим через $\mathbf{K\Sigma}$ логику, получающуюся добавлением к исчислению $\mathbf{K}$ аксиом $(\mathsf{A}^{\Box}_{\mathfrak{S}})$, где $\mathfrak{S} \in \mathbf{\Sigma}$. Приведем еще определения двух *максимальных* (нормальных) логик, то есть не имеющих собственных непротиворечивых расширений:

$$\mathbf{Ver} = \mathbf{K} + \{\Box p\},$$
$$\mathbf{Triv} = \mathbf{K} + \{\Box p \leftrightarrow p\}.$$

Имеют место следующие строгие включения между этими логиками:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathbf{K} & \subset & \mathbf{K4} & \subset & \mathbf{GL} & \subset & \mathbf{Ver} & \qquad & & & \\
\cap & & \cap & & & & & & \mathbf{D} & \subset & \mathbf{KD45} \\
\mathbf{T} & \subset & \mathbf{S4} & \subset & \mathbf{S4.1} & \subset & \mathbf{Grz} & & \cap & & \cap \\
\cap & & \cap & & & & \cap & & \mathbf{T} & \subset & \mathbf{S5} \\
\mathbf{B} & \subset & \mathbf{S5} & & \subset & & \mathbf{Triv} & & & &
\end{array}$$

В последующем изложении формальные выводы в исчислениях гильбертовского типа будем записывать достаточно схематично. В частности, мы будем писать цепочку $L \vdash A_0 \overset{1}{-} A_1 \overset{2}{-} \ldots \overset{n}{-} A_n$, где $\overset{\kappa}{-} \in \{\to, \leftrightarrow\}$, подразумевая $L \vdash A_{\kappa-1} \overset{\kappa}{-} A_\kappa$, $\kappa = 1..n$.

Напомним, что *секвенцией* называется выражение вида $\Pi \Rightarrow \Sigma$, где Π и Σ — конечные мультимножества[1] формул. Включение мультимножеств формул будем понимать без учета кратности вхождения формул в них, то есть запись $\Pi \subseteq \Sigma$ будет означать, что всякая формула из Π входит в Σ. Объединение мультимножеств формул, например, $\Pi \cup \Sigma$, будем обозначать как $\Pi\Sigma$, а также будем для краткости писать ΠA вместо $\Pi \cup \{A\}$. Символом $\mathrm{Sb}\, A$ мы обозначаем множество подформул формулы A, а для (мульти)множества формул Γ мы используем обозначения $\mathrm{Sb}\,\Gamma := \bigcup\{\mathrm{Sb}\, A \mid A \in \Gamma\}$ и $\Box\Gamma := \{\Box A \mid A \in \Gamma\}$. Если секвенция $\Pi \Rightarrow \Sigma$ обозначена через w, то обозначим ее антецедент $\langle w| := \Pi$, сукцедент $|w\rangle := \Sigma$, множество подформул $\mathrm{Sb}\, w := \mathrm{Sb}\,\Pi\Sigma$. Для формулы A пишем $A \in w$, если $A \in \Pi\Sigma$; для множества формул Γ пишем $\Gamma \subseteq w$, если $\Gamma \subseteq \Pi\Sigma$, и $w \subseteq \Gamma$, если $\Pi\Sigma \subseteq \Gamma$. Если $\mathcal{L}$ — некоторое секвенциальное исчисление, то запись $\mathcal{L} \vdash A \Leftrightarrow B$ означает: $\mathcal{L} \vdash A \Rightarrow B$ и $\mathcal{L} \vdash B \Rightarrow A$.

[1]Под *мультимножеством* мы понимаем множество с указанием кратности ($\geqslant 0$) вхождения каждого элемента в него. Формально, мультимножеством $\Box$-формул называется отображение $\mathbf{Fm}^{\Box} \to \mathbb{N}$.

Секвенциальное исчисление $[L]$ для логики $L \in \{\mathbf{K}, \mathbf{K4}, \mathbf{T}, \mathbf{S4}, \mathbf{B}, \mathbf{S5}, \mathbf{GL}, \mathbf{Grz}\}$ получается добавлением к секвенциальному исчислению высказываний (с сечением) правила $(\Rightarrow^{\Box}_{L})$, а для логик, содержащих аксиому рефлексивности, еще и правила $(\Box\Rightarrow)$ (рис. 1.2). Известно, что сечение

$$(\Box\Rightarrow)\ \frac{A, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Box A, \Pi \Rightarrow \Sigma}$$

$$(\Rightarrow^{\Box}_{\mathbf{K}})\ \frac{\Pi \Rightarrow A}{\Box\Pi \Rightarrow \Box A} \qquad (\Rightarrow^{\Box}_{\mathbf{K4}})\ \frac{\Pi, \Box\Pi \Rightarrow A}{\Box\Pi \Rightarrow \Box A}$$

$$(\Rightarrow^{\Box}_{\mathbf{T}})\ \frac{\Pi \Rightarrow A}{\Box\Pi \Rightarrow \Box A} \qquad (\Rightarrow^{\Box}_{\mathbf{S4}})\ \frac{\Box\Pi \Rightarrow A}{\Box\Pi \Rightarrow \Box A}$$

$$(\Rightarrow^{\Box}_{\mathbf{B}})\ \frac{\Pi \Rightarrow \Box\Sigma, A}{\Box\Pi \Rightarrow \Sigma, \Box A} \qquad (\Rightarrow^{\Box}_{\mathbf{S5}})\ \frac{\Box\Pi \Rightarrow \Box\Sigma, A}{\Box\Pi \Rightarrow \Box\Sigma, \Box A}$$

$$(\Rightarrow^{\Box}_{\mathbf{GL}})\ \frac{\Box A, \Pi, \Box\Pi \Rightarrow A}{\Box\Pi \Rightarrow \Box A} \qquad (\Rightarrow^{\Box}_{\mathbf{Grz}})\ \frac{\Box(A \to \Box A), \Box\Pi \Rightarrow A}{\Box\Pi \Rightarrow \Box A}$$

Рис. 1.2. Секвенциальные правила нормальных логик.

устранимо в исчислениях для **K**, **K4**, **T**, **S4** [5], **GL** и **Grz** [8] и не устранимо в исчислениях для **B** и **S5** [27, 28, 31]. В последних двух можно ограничиться *аналитическим* сечением (введенным в [29]), что установлено в работе [31]:

$$\frac{\Pi \Rightarrow \Sigma, A \quad A, \Pi' \Rightarrow \Sigma'}{\Pi\Pi' \Rightarrow \Sigma\Sigma'}, \quad A \in \mathrm{Sb}(\Pi\Pi'\Sigma\Sigma')$$

Получающееся при этом исчисление $[\mathbf{S5}]^-$ обладает *свойством подформульности*: всякая выводимая в нем секвенция $\Pi \Rightarrow \Sigma$ имеет вывод, все секвенции которого состоят из подформул формул из $\Pi\Sigma$. Правило $(\Rightarrow^{\Box}_{\mathbf{B}})$ может нарушать свойство подформульности, однако в работе [31] было доказано, что можно ограничиться такими применениями этого правила, в которых $\Sigma \subseteq \mathrm{Sb}\,\Pi A$ и даже $\Box\Sigma \subseteq \mathrm{Sb}\,\Pi A$. Тем самым свойство подформульности справедливо для исчисления $[\mathbf{B}]^-$ с аналитическим сечением и ограниченным правилом $(\Rightarrow^{\Box}_{\mathbf{B}})$. Наконец, исчисление $[\mathbf{Grz}]^-$ с аналитическим сечением обладает лишь следующим *слабым* свойством подформульности: всякая выводимая секвенция $\Pi \Rightarrow \Sigma$ имеет вывод, состоящий из секвенций вида $\Gamma \Rightarrow \Delta$, где $\Delta \subseteq \mathrm{Sb}\,\Pi\Sigma$ и $\Gamma \subseteq \mathrm{Sb}(\Pi\Sigma \cup \{\Box(A \to \Box A) \mid \Box A \in \mathrm{Sb}\,\Pi\Sigma\})$.

Оператором разрешимости будем называть модальный оператор, задаваемый формулой $\Box p \vee \Box\neg p$ (т. е. переводящий произвольную формулу A в $\Box A \vee \Box\neg A$). Пусть дана некоторая $\Box$-логика L. Естественным образом возникает задача описания всех "законов", которым подчиняется оператор разрешимости в логике L. Для формулировки этих законов введем $\rhd$-язык, отличающийся от $\Box$-языка лишь заменой символа $\Box$ на $\rhd$. Определения *$\rhd$-формулы* и *$\rhd$-логики* формулируются аналогично приведенным выше. Допуская некоторую вольность в обозначениях, мы будем иногда употреблять запись $\rhd A$, где A есть $\Box$-формула, как обозначение для формулы $\Box A \vee \Box\neg A$; такое использование символа $\rhd$ всегда можно будет легко распознать по контексту.

Далее зададим перевод $\mathsf{tr}\colon \mathbf{Fm}^{\rhd} \to \mathbf{Fm}^{\Box}$, сохраняющий переменные и булевы связки, а на формулах вида $\rhd A$ действующий следующим образом: $\mathsf{tr}(\rhd A) = \Box\mathsf{tr}(A) \vee \Box\neg\mathsf{tr}(A)$. Вместо $\mathsf{tr}(A)$ мы будем часто использовать запись $A_{\rhd}$. Теперь *логикой (оператора) разрешимости* над логикой L назовем множество $\rhd$-формул, tr-переводы которых являются теоремами логики L:

$$L^{\rhd} := \{A \in \mathbf{Fm}^{\rhd} \mid A_{\rhd} \in L\} = \mathsf{tr}^{-1}(L).$$

Легко видеть, например, что одним из законов, описывающих поведение оператора разрешимости над любой логикой L, будет формула $\rhd p \leftrightarrow \rhd\neg p$ (называемая в дальнейшем аксиомой зеркальности), которая, следовательно, принадлежит логике $L^{\rhd}$.

Шкалой (Крипке) называется пара $F = \langle W, \uparrow\rangle$, где W — непустое множество ("миров"), а $\uparrow$ есть бинарное отношение ("достижимости") на W. Множество точек, достижимых из данной точки $w \in W$, обозначаем $w\!\uparrow\, := \{x \in W \mid w\!\uparrow\! x\}$. Символ $\downarrow$ будет служить обозначением для отношения, обратного к отношению $\uparrow$, при этом кванторы по точкам, достижимым из данной точки w, будут записываться как $\forall x\!\downarrow\! w$ и $\exists x\!\downarrow\! w$.

Модель (Крипке) $M = \langle F, \models\rangle$ состоит из шкалы F и оценки переменных $\models \subseteq W \times \mathrm{Var}$. Понятие “формула A истинна в точке w модели M” (для которого используется запись $M,w \models A$, в которой мы будем зачастую опускать M) определяется для $\Box$- и для $\rhd$-формул индукцией по построению формулы стандартным образом:

$$
\begin{array}{lcl}
w \not\models \bot; & & \\
w \models p & \leftrightharpoons & \langle w,p\rangle \in \models; \\
w \models (A \to B) & \leftrightharpoons & (w \not\models A \quad \text{или} \quad w \models B); \\
w \models \Box A & \leftrightharpoons & \forall x{\downarrow}w \quad x \models A; \\
w \models \rhd A & \leftrightharpoons & (\forall x{\downarrow}w \quad x \models A) \text{ или } (\forall x{\downarrow}w \quad x \not\models A).
\end{array}
$$

Из данного определения вытекает, что $w \models A \Leftrightarrow w \models \mathsf{tr}(A)$ для любой $\rhd$-формулы A. Формула A *общезначима* на шкале F (обозначение: $F \models A$), если A истинна в каждой точке этой шкалы при любой оценке переменных. Если Γ — формула или множество формул, то Γ-*шкалой* называется шкала, на которой общезначимо Γ; класс всех Γ-шкал будем обозначать посредством $\mathcal{F}(\Gamma)$ и называть классом шкал, *определяемых* формулой или множеством Γ. Под истинностью (общезначимостью) секвенции $\Pi \Rightarrow \Sigma$ мы будем подразумевать истинность (общезначимость) формулы $\bigwedge\Pi \to \bigvee\Sigma$.

Классы шкал, определяемые первыми пятью аксиомами, перечисленными на рис. 1.1, задаются условиями первого порядка, указанными на рис. 1.3 (см. [11, 12]).

$(\varphi^{\Box}_{\mathbf{T}})$	$\forall w \quad w{\uparrow}w$	(рефлексивность)
$(\varphi^{\Box}_{\mathbf{D}})$	$\forall w\ \exists x \quad w{\uparrow}x$	(сериальность)
$(\varphi^{\Box}_{\mathbf{B}})$	$\forall w\ \forall x{\downarrow}w \quad x{\uparrow}w$	(симметричность)
$(\varphi^{\Box}_{\mathbf{4}})$	$\forall w\ \forall x{\downarrow}w\ \forall y{\downarrow}x \quad w{\uparrow}y$	(транзитивность)
$(\varphi^{\Box}_{\mathbf{5}})$	$\forall w\ \forall x{\downarrow}w\ \forall y{\downarrow}w \quad x{\uparrow}y$	(евклидовость)

Рис. 1.3. Условия первого порядка для $\Box$-аксиом.

Аксиома Лёба $(\mathsf{A}^{\Box}_{\mathbf{L}})$ общезначима на шкале F если и только если F обладает свойствами транзитивности и обратной фундированности: не существует бесконечных возрастающих цепей $x_0{\uparrow}x_1{\uparrow}x_2{\uparrow}\ldots$ Аксиома Гжегорчика ($\mathsf{A}^{\Box}_{\mathbf{G}}$) общезначима на шкале F если и только если F обладает свойствами рефлексивности, транзитивности и обратной слабой фундированности: не существует бесконечно возрастающих цепей, состоящих из попарно различных элементов. Классы шкал, определяемые этими двумя аксиомами, не являются определимыми в языке первого порядка (см. [11]). В классе транзитивных шкал аксиома ($\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{1}}$) выражает свойство Маккинси: из любой точки достижима некоторая максимальная точка: $\forall w\ \exists x{\downarrow}w\ \forall y{\downarrow}x$ $x = y$.

Обозначим $\Box$-*логику* класса шкал $\mathcal{F}$ посредством $\mathcal{L}^{\Box}(\mathcal{F}) := \{A \in \mathbf{Fm}^{\Box} \mid \mathcal{F} \models A\}$. Логика L называется *полной* (относительно класса шкал $\mathcal{F}$), если $L = \mathcal{L}^{\Box}(\mathcal{F})$; *финитно аппроксимируемой*, если она полна относительно некоторого класса конечных шкал. Для $\rhd$-языка определения даются аналогично.

Известные теоремы о полноте [11, 12] утверждают, что каждая из перечисленных выше логик L является полной относительно класса L-шкал, то есть для любой формулы A справедлива эквивалентность: $L \vdash A \Leftrightarrow$ A общезначима на любой L-шкале. Кроме того, эти логики финитно аппроксимируемы, и потому в сформулированной теореме о полноте можно ограничится классами *конечных* шкал. Для логик **GL** и **Grz** соответствующие теоремы будут звучать следующим образом:

$\mathbf{GL} \vdash A \iff A$ общезначима на любом конечном строгом частичном порядке, т. е. на любой конечной иррефлексивной транзитивной шкале;

$\mathbf{Grz} \vdash A \iff A$ общезначима на любом конечном нестрогом частичном порядке, то есть на любой конечной рефлексивной транзитивной антисимметричной шкале;

(свойство антисимметричности задается условием: $\forall x, y\ [x{\uparrow}y{\uparrow}x \Rightarrow x = y]$).

Отметим, что **Ver** (соотв. **Triv**) есть логика шкалы, состоящей из одной иррефлексивной (соотв. рефлексивной) точки.

Глава 2.

Логика эпистемической разрешимости

Эта и следующая глава посвящены вопросам аксиоматизации логик оператора разрешимости над логиками, не содержащими аксиомы рефлексивности. Заметим, что в них оператор необходимости $\Box$ не выражается через оператор разрешимости $\rhd$ (или, по крайней мере, такое выражение не известно). Здесь мы представим аксиоматику гильбертовского типа для логик разрешимости над логиками $\mathbf{K\Sigma}$, где $\mathbf{\Sigma} \subseteq \{\mathbf{D}, \mathbf{4}, \mathbf{5}\}$. Как известно, логика **KD45** корректно описывает законы поведения эпистемической модальности: постулаты этой логики оказываются (интуитивно) верными, если формулы вида $\Box A$ интерпретировать как “известно (некоторому идеализированному субъекту), что утверждение A истинно”. При такой (неформальной) интерпретации формула вида $\rhd A$ приобретает следующий смысл: “истинностное значение утверждения A известно”. В разделе 2.2 будет показано, что логика такой модальности $\rhd$ совпадает с логикой разрешимости над **K45**.

Необходимо отметить, что один из вариантов гильбертовской аксиоматики логик разрешимости над **K** и **K4** был предложен в работах [17, 19]. Предлагаемая нами аксиоматика несколько от него отличается и более близка по виду к аксиоматике нормальных модальных логик (см. главу 1).

2.1. Транзитивная евклидова логика разрешимости

В этом разделе мы сформулируем аксиоматические системы гильбертовского типа для логик разрешимости над $\mathbf{K\Sigma}$, где $\mathbf{\Sigma} \subseteq \{\mathbf{4}, \mathbf{5}\}$. Для простоты изложения, мы не будем вводить специального обозначения для этих систем, обозначая их посредством $\mathbf{K\Sigma}^{\triangleright}$ и полагая, что по контексту можно будет понять, идет ли речь о логике разрешимости над некоторой $\Box$-логикой или же о соответствующей аксиоматической системе. Доказываемая ниже теорема 2.1.2 оправдывает такое двусмысленное обозначение. Рассмотрение логик, содержащих аксиому сериальности $(\mathsf{A}^{\Box}_{\mathbf{D}})$, отложим до раздела 2.2.

Аксиоматика минимальной логики разрешимости $\mathbf{K}^{\triangleright}$ задается следующим набором аксиом и правил вывода:

$(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\top})$ классические тавтологии в $\triangleright$-языке

$(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\neg})$ $\triangleright p \leftrightarrow \triangleright\neg p$ (зеркальность)

$(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\leftrightarrow})$ $\triangleright(p \leftrightarrow q) \to (\triangleright p \leftrightarrow \triangleright q)$ (замена эквивалентных)

$(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\vee})$ $\triangleright p \to [\triangleright(q \to p) \vee \triangleright(p \to r)]$ (дихотомия)

$$(\mathsf{MP})\ \frac{A \quad A \to B}{B} \qquad (\mathsf{Sub})\ \frac{A}{A[B/p]} \qquad (\mathsf{Dec})\ \frac{A}{\triangleright A}$$

Логики $\mathbf{K\Sigma}^{\triangleright}$, $\mathbf{\Sigma} \subseteq \{\mathbf{4}, \mathbf{5}\}$, аксиоматизируются добавлением к системе $\mathbf{K}^{\triangleright}$ соответствующих аксиом $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathfrak{S}})$, $\mathfrak{S} \in \mathbf{\Sigma}$:

$(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{4}})$ $\triangleright p \to \triangleright(q \to \triangleright p)$ (слабая транзитивность)

$(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{5}})$ $\neg\triangleright p \to \triangleright(q \to \neg\triangleright p)$ (слабая евклидовость)

Очевидно, что полученные системы замкнуты относительно правила эквивалентной замены $(\mathsf{RE}^{\triangleright})$. Названия двух последних аксиом частично объясняются утверждениями 5.2.1–5.2.3, доказанными в главе 5.

Основным результатом этого раздела является доказываемая ниже теорема о полноте. Она утверждает, что системы $\mathbf{K\Sigma}^{\triangleright}$ аксиоматизируют в точности логики разрешимости над $\mathbf{K\Sigma}$, $\mathbf{\Sigma} \subseteq \{\mathbf{4}, \mathbf{5}\}$, чем и объясняется их обозначение. В доказательстве этой теоремы мы используем метод построения канонических моделей, приспособленный для применения к $\rhd$-логикам в работах [17, 19]. Для логик разрешимости над **K** и **K4** соответствующая теорема о полноте была доказана в статье [19], однако, поскольку наши аксиоматики логик $\mathbf{K}^{\rhd}$ и $\mathbf{K4}^{\rhd}$ несколько отличаются от предложенных в упомянутой статье, мы проводим доказательство и для них. Нам потребуется следующая лемма.

Лемма 2.1.1. $\mathbf{K}^{\rhd} \vdash \rhd p \mathbin{\&} \rhd q \to \rhd(p \mathbin{\&} q)$.

Доказательство. Имеем следующий вывод в исчислении $\mathbf{K}^{\rhd}$:

$$\mathbf{K}^{\rhd} \vdash \rhd[p \to q] \xleftrightarrow{1} \rhd[p \leftrightarrow (p \mathbin{\&} q)] \xrightarrow{2} [\rhd p \to \rhd(p \mathbin{\&} q)].$$

Здесь эквивалентность '$\xleftrightarrow{1}$' получена из тавтологии $[p \to q] \leftrightarrow [p \leftrightarrow (p \mathbin{\&} q)]$ применением правила ($\mathsf{RE}^{\rhd}$), а импликация '$\xrightarrow{2}$' является следствием подстановочного частного случая аксиомы ($\mathsf{A}^{\rhd}_{\leftrightarrow}$). Аналогично выводим:

$$\mathbf{K}^{\rhd} \vdash \rhd[q \to p] \to [\rhd q \to \rhd(p \mathbin{\&} q)].$$

Наконец, используя аксиому дихотомии ($\mathsf{A}^{\rhd}_{\vee}$), получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{\rhd} \vdash \rhd p \ &\longrightarrow \{\rhd(q \to p) \vee \rhd(p \to q)\} \longrightarrow \\ &\longrightarrow \{[\rhd p \to \rhd(p \mathbin{\&} q)] \vee [\rhd q \to \rhd(p \mathbin{\&} q)]\} \longleftrightarrow \\ &\longleftrightarrow \{(\rhd p \mathbin{\&} \rhd q) \to \rhd(p \mathbin{\&} q)\}. \end{aligned}$$

Остается заметить, что в полученной формуле $\rhd p \to \{(\rhd p \mathbin{\&} \rhd q) \to \rhd(p \mathbin{\&} q)\}$ первая посылка $\rhd p$ является лишней. $\dashv$

Теорема 2.1.2 (Полнота аксиоматик). *Для каждого подмножества* $\mathbf{\Sigma} \subseteq \{4, 5\}$ *и любой* $\rhd$*-формулы* A *эквивалентны следующие условия:*

(1) $\mathbf{K\Sigma}^{\rhd} \vdash A$;

(2) $\mathbf{K\Sigma} \vdash \mathsf{tr}(A)$;

(3) *A общезначима на любой* $\mathbf{K\Sigma}$*-шкале.*

Доказательство проведем по схеме (1) $\Rightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1). Эквивалентность (2)$\Leftrightarrow$(3) является следствием известной (см. [11, 12]) теоремы о полноте логик $\mathbf{K\Sigma}$ относительно классов $\mathbf{K\Sigma}$-шкал (см. также описание этих классов на стр. 15 настоящей работы). До конца доказательства $\triangleright$-формулы будем называть просто формулами.

$\underline{(1) \Rightarrow (2)}$ Аксиомы логики $\mathbf{K}^{\triangleright}$ общезначимы на любой шкале, следовательно, их tr-переводы доказуемы в $\mathbf{K}$.

Выведем tr-перевод аксиомы $(\mathsf{A}_{\mathbf{4}}^{\triangleright})$ в логике $\mathbf{K4}$:

$\mathbf{K4} \vdash \Box p \longrightarrow \Box\Box p \longrightarrow \Box\triangleright p \longrightarrow \Box(q \to \triangleright p) \longrightarrow \triangleright(q \to \triangleright p)$.

Аналогично выводится $\mathbf{K4} \vdash \Box\neg p \to \triangleright(q \to \triangleright p)$. Отсюда по правилам пропозициональной логики получаем $\mathbf{K4} \vdash \triangleright p \to \triangleright(q \to \triangleright p)$.

Наконец, вывод tr-перевода аксиомы $(\mathsf{A}_{\mathbf{5}}^{\triangleright})$ в логике $\mathbf{K5}$ схематически можно изобразить следующим образом:

$$\mathbf{K5} \vdash \neg\triangleright p \begin{array}{l} \nearrow \Diamond p \to \Box\Diamond p \searrow \\ \searrow \Diamond\neg p \to \Box\Diamond\neg p \nearrow \end{array} \Box\neg\triangleright p \to \Box(q \to \neg\triangleright p) \to \triangleright(q \to \neg\triangleright p).$$

$\underline{(3) \Rightarrow (1)}$ Построим каноническую модель $M_L = \langle W_L, \uparrow, \models\rangle$ логики $L := \mathbf{K\Sigma}^{\triangleright}$. Элементами этой модели являются максимальные L-непротиворечивые множества формул. Оценка переменных задается стандартным способом: $w \models p \leftrightharpoons p \in w$, для любых $w \in W_L$ и $p \in \mathrm{Var}$. Прежде чем определить отношение достижимости $\uparrow$, введем несколько удобных обозначений.

Для произвольной формулы A обозначим $\boxtimes A := \{\triangleright(B \to A) \mid B \in \mathbf{Fm}^{\triangleright}\}$. В дальнейших рассуждениях символ $\boxtimes$ будет играть роль, аналогичную роли оператора $\Box$ в стандартной процедуре построения канонической модели нормальной логики. В то же время, эти символы имеют разные “типы”: если $\Box$ был оператором, преобразующим формулу в формулу, то $\boxtimes$ преобразует формулу в множество формул. Следует также отметить, что семантически оператор $\boxtimes$ не эквивалентен оператору $\Box$ (более детальное изучение оператора $\boxtimes$ будет проведено в разделе 5.3).

Далее, для $w \in W_L$ обозначим $\sharp w := \{A \in \mathbf{Fm}^{\triangleright} \mid \boxtimes A \subseteq w\}$. Наконец, определим каноническое отношение достижимости: $w{\uparrow}x \leftrightharpoons \sharp w \subseteq x$.

Лемма 2.1.3 (Свойства множества $\sharp w$). *Для каждого $w \in W_L$ имеем:*

1° (Дихотомия) *Если $\rhd A \in w$, то ($A \in \sharp w$ или $\neg A \in \sharp w$).*

2° *Множество $\sharp w$ замкнуто относительно (даже пустых) конъюнкций; в частности, $\sharp w \neq \varnothing$.*

3° *Множество $\sharp w$ замкнуто относительно выводимости в логике L: если $A \in \sharp w$ и $L \vdash A \to B$, то $B \in \sharp w$.*

4° *Свойство дихотомии обратимо: если $A \in \sharp w$, то $\rhd A \in w$.*

▶ **1°.** Предположим, что $A, \neg A \notin \sharp w$, тогда по определению множества $\sharp w$ имеем: $\exists B, C \in \mathbf{Fm}^{\rhd} \ \ \neg\rhd(B \to A) \in w$, $\neg\rhd(C \to \neg A) \in w$. Но по аксиоме дихотомии выводим: $\mathbf{K}^{\rhd} \vdash \rhd A \to [\rhd(B \to A) \vee \rhd(C \to \neg A)]$, откуда заключаем, что множество w оказывается даже $\mathbf{K}^{\rhd}$-противоречивым.

2°. По определению, пустая конъюнкция есть $\top$. Поскольку $\mathbf{K}^{\rhd} \vdash \rhd(B \to \top)$ для любой формулы B, то $\boxtimes\top \subseteq \mathbf{K}^{\rhd} \subseteq L \subseteq \sharp w$ и значит $\top \in \sharp w$.

Пусть теперь $A, B \in \sharp w$, докажем, что $(A \,\&\, B) \in \sharp w$. Для этого возьмем любую формулу C и покажем, что $\rhd[C \to (A \,\&\, B)] \in w$. Из включений $\boxtimes A \subseteq w$ и $\boxtimes B \subseteq w$ следует, что $\rhd(C \to A) \in w$ и $\rhd(C \to B) \in w$. Далее выводим:

$$\mathbf{K}^{\rhd} \vdash \rhd(C \to A) \,\&\, \rhd(C \to B) \xrightarrow{1} \rhd[(C \to A) \,\&\, (C \to B)] \xleftrightarrow{2} \rhd[C \to (A \,\&\, B)],$$

где импликация $\xrightarrow{1}$ следует из леммы 2.1.1, а эквивалентность $\xleftrightarrow{2}$ получена по правилу ($\mathsf{RE}^{\rhd}$). Поскольку множество w замкнуто относительно выводимости в $\mathbf{K}^{\rhd}$ (и даже в L), то мы заключаем: $\rhd[C \to (A \,\&\, B)] \in w$.

3°. Возьмем любую формулу C и покажем, что $\rhd(C \to B) \in w$. В силу $\boxtimes A \subseteq w$ имеем: $\rhd[\neg(C \to B) \to A] \in w$. Но из $L \vdash A \to B$ средствами лишь логики высказываний выводим: $L \vdash [\neg(C \to B) \to A] \leftrightarrow [C \to B]$. Наконец, применяя к этой эквивалентности правило ($\mathsf{RE}^{\rhd}$), получаем: $\rhd(C \to B) \in w$.

4°. Из $\boxtimes A \subseteq w$ вытекает: $\rhd(\top \to A) \in w$, что равносильно $\rhd A \in w$. ◀

Лемма 2.1.4 (О канонической модели). *Для любого $w \in W_L$ и произвольной $\triangleright$-формулы A имеем:* $w \models A \ \Leftrightarrow \ A \in w$.

▶ Индукция по построению A. Атомарные и булевы случаи тривиальны. Рассмотрим формулу $A \equiv \triangleright B$ (здесь $\equiv$ есть графическое равенство).

$$\begin{array}{lll}
(\Leftarrow) & \triangleright B \in w & \Rightarrow \text{(по дихотомии } \mathbf{1}^\circ) \\
 & B \in \sharp w \ \text{ или } \ \neg B \in \sharp w & \Rightarrow \text{(по определению } \uparrow) \\
 & (\forall x{\downarrow}w \ B \in x) \ \text{ или } \ (\forall x{\downarrow}w \ \neg B \in x) & \Rightarrow \text{(по непротиворечивости } x) \\
 & (\forall x{\downarrow}w \ B \in x) \ \text{ или } \ (\forall x{\downarrow}w \ B \notin x) & \Rightarrow \text{(по предположению индукции)} \\
 & (\forall x{\downarrow}w \ x \models B) \ \text{ или } \ (\forall x{\downarrow}w \ x \not\models B) & \Rightarrow w \models \triangleright B.
\end{array}$$

($\Rightarrow$) Пусть $\triangleright B \notin w$. Для доказательства $w \not\models \triangleright B$ построим такие $x, y{\downarrow}w$, что $x \models B$ и $y \not\models B$. Следующие два множества являются $L^{\triangleright}$-непротиворечивыми:

$$X := \sharp w \cup \{B\};$$
$$Y := \sharp w \cup \{\neg B\}.$$

Докажем это, например, для Y. Допустим противное, тогда существуют такие формулы $A_1, \ldots, A_n \in \sharp w$, где $n \geqslant 0$, что $L \vdash (A_1 \ \& \ldots \& A_n) \to B$. По свойству $\mathbf{2}^\circ$ получаем: $(A_1 \ \& \ldots \& A_n) \in \sharp w$, и отсюда по свойству $\mathbf{3}^\circ$ вытекает: $B \in \sharp w$, что ввиду $\mathbf{4}^\circ$ дает $\triangleright B \in w$, в противоречие с предположением. Непротиворечивость множества X доказывается аналогично, с дополнительным применением аксиомы зеркальности.

Наконец, по лемме Линденбаума можно погрузить множества X и Y в максимальные непротиворечивые: $X \subseteq x \in W_L$, $Y \subseteq y \in W_L$. Очевидно, $w{\uparrow}x$, $w{\uparrow}y$, и поскольку $B \in x$ и $\neg B \in y$, то по предположению индукции получаем: $x \models B$ и $y \not\models B$. ◀

Из доказанной леммы следует, что всякая формула, не являющаяся теоремой логики L, опровергается в канонической модели. Для завершения доказательства теоремы остается проверить, что каноническая шкала является $\mathbf{K\Sigma}$-шкалой. Случай $\mathbf{\Sigma} = \varnothing$ тривиален.

В предположении $\mathbf{4} \in \mathbf{\Sigma}$ докажем, что отношение $\uparrow$ транзитивно. Пусть $w{\uparrow}x{\uparrow}y$; покажем, что $w{\uparrow}y$, т. е. $\sharp w \subseteq y$. Возьмем любую $A \in \sharp w$ и докажем, что $A \in y$. Для всякой формулы B имеем: $\rhd(B \to A) \in w$. По аксиоме $(\mathsf{A}_{\mathbf{4}}^{\rhd})$, для произвольной формулы C выводим: $\mathbf{K4}^{\rhd} \vdash \rhd(B \to A) \to \rhd[C \to \rhd(B \to A)]$. Ввиду замкнутости множества w относительно выводимости в $\mathbf{K4}^{\rhd}$ заключаем: $\rhd[C \to \rhd(B \to A)] \in w$, что в силу произвольности C дает: $\boxtimes\rhd(B \to A) \subseteq w$ и $\rhd(B \to A) \in \sharp w \subseteq x$, а отсюда, в свою очередь, в силу произвольности B получаем $\boxtimes A \subseteq x$ и $A \in \sharp x \subseteq y$, что и требовалось.

Предполагая $\mathbf{5} \in \mathbf{\Sigma}$, докажем, что отношение $\uparrow$ евклидово. Пусть $w{\uparrow}x$, $w{\uparrow}y$; надо доказать: $x{\uparrow}y$, т. е. $\sharp x \subseteq y$. Допустим противное, т. е. $\boxtimes A \subseteq x$ и $A \notin y$ для некоторой формулы A. Ввиду $w{\uparrow}y$ имеем: $\boxtimes A \nsubseteq w$, значит, для некоторой формулы B имеет место: $\neg\rhd(B \to A) \in w$. По аксиоме $(\mathsf{A}_{\mathbf{5}}^{\rhd})$ в силу замкнутости w относительно выводимости в логике $L^{\rhd}$ получаем: для произвольной формулы C справедливо $\rhd[C \to \neg\rhd(B \to A)] \in w$; т. е. $\boxtimes\neg\rhd(B \to A) \subseteq w$. Тогда: $\neg\rhd(B \to A) \in \sharp w \subseteq x$, что означает $\boxtimes A \nsubseteq x$, вопреки выбору формулы A.

Теорема полностью доказана. $\dashv$

2.2. Сериальная логика разрешимости

Как известно (см., напр., [12]), логика $\mathbf{D}$ является *канонической*, т. е. общезначимой на своей канонической шкале, в силу того, что эта шкала является сериальной. В этом разделе мы покажем, что каноническая шкала логики разрешимости над $\mathbf{D}$ (а также над любым непротиворечивым расширением логики $\mathbf{D}$) не является сериальной. Тем самым метод доказательства полноты, использованный в предыдущем разделе, в данном случае не применим.

Один из возможных путей решения этой проблемы может состоять в модификации конструкции канонической модели. Однако оказывается, что этого не требуется для нахождения полной аксиоматизации логики разрешимости над $\mathbf{D}$. В этом разделе мы покажем, что для широкого класса логик L добавление аксиомы сериальности $(\mathsf{A}^{\Box}_{\mathbf{D}})$ не изменяет логику разрешимости: $L\mathbf{D}^{\rhd} = L^{\rhd}$, где $L\mathbf{D} = L + (\mathsf{A}^{\Box}_{\mathbf{D}})$. В частности, это справедливо для рассмотренных выше логик $L = \mathbf{K\Sigma}$, где $\mathbf{\Sigma} \subseteq \{\mathbf{4}, \mathbf{5}\}$. Заметим, что на канонической шкале логики $\mathbf{KD\Sigma}^{\rhd}$ общезначима логика $\mathbf{K\Sigma}^{\rhd}$ (поскольку транзитивность и евклидовость этой шкалы следует из наличия аксиом $(\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{4}})$ и $(\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{5}})$ в данной логике), а значит и (равная ей) логика $\mathbf{KD\Sigma}^{\rhd}$. Следовательно, логика $\mathbf{KD\Sigma}^{\rhd}$ является канонической.

Для начала заметим, что логика разрешимости над $\mathbf{Ver}$ получается добавлением к логике $\mathbf{K}^{\rhd}$ аксиомы $\rhd p$. Действительно, с одной стороны, данная аксиома корректна (т. е. tr-перевод этой аксиомы вывводим в логике $\mathbf{Ver}$), а с другой, логика $\mathbf{Ver}^{\rhd} = \mathbf{K}^{\rhd} + \{\rhd p\}$ является максимальной (т. е. не имеет собственных непротиворечивых расширений), что устанавливается аналогично максимальности логики $\mathbf{Ver}$. Оказывается, что логика $\mathbf{Ver}^{\rhd}$ является даже наибольшей в решетке (непротиворечивых) логик разрешимости, расширяющих $\mathbf{K}^{\rhd}$, как показывет следующая теорема.

Теорема 2.2.1. $L^{\rhd} \subseteq \mathbf{Ver}^{\rhd}$ *для любой непротиворечивой нормальной* $\Box$-*логики* L.

Доказательство. Пусть $A \in L^{\rhd}$. Рассмотрим формулу A как булеву комбинацию входящих в нее переменных и формул вида $\rhd B$: $A \equiv f(\vec{p}, \rhd B_1, \ldots, \rhd B_n)$, где f — булева формула, $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_m)$ — список всех переменных, входящих в A. Требуется доказать, что $\mathbf{Ver}^{\rhd} \vdash A$. В силу теоремы о замене эквивалентных, справедливой для любой $\rhd$-логики, это равносильно утверждению $\mathbf{Ver}^{\rhd} \vdash f(\vec{p}, \top, \ldots, \top)$, поскольку $\mathbf{Ver}^{\rhd} \vdash \rhd B \leftrightarrow \top$ для любой формулы B. Так как логика $\mathbf{Ver}^{\rhd}$ является консервативным расширением логики высказываний, нам остается проверить, что $f(\vec{p}, \top, \ldots, \top)$ есть тавтология. Для этого возьмем произвольный набор $\vec{\sigma} \in \{\bot, \top\}^m$ значений переменных $\vec{p}$ и покажем, что значение формулы $f(\vec{p}, \top, \dots, \top)$ на нем равно $\top$, т. е. что формула $\vartheta := f(\vec{\sigma}, \top, \dots, \top)$ эквивалентна $\top$ (в логике высказываний).

Поскольку логика $L^{\triangleright}$ замкнута относительно правила (Sub), подстановка в формулу A значений $\vec{\sigma}$ вместо переменных $\vec{p}$ дает $\triangleright$-предложение (т. е. $\triangleright$-формулу, не содержащую переменных) $A[\vec{\sigma}/\vec{p}] \in L^{\triangleright}$. Легко проверить, что всякое $\triangleright$-предложение вида $\triangleright B$ эквивалентно в логике $L^{\triangleright}$ (и даже в $\mathbf{K}^{\triangleright}$) формуле $\top$ (для этого достаточно заметить, что любое $\triangleright$-предложение эквивалентно $\bot$ или $\top$, и кроме того $\triangleright\bot$ и $\triangleright\top$ эквивалентны $\top$). Поэтому формула $A[\vec{\sigma}/\vec{p}]$ равносильна в $L^{\triangleright}$ (и даже в $\mathbf{K}^{\triangleright}$) формуле ϑ, что влечет $\vartheta \in L^{\triangleright}$. Наконец, поскольку $L^{\triangleright}$ непротиворечива, заключаем, что ϑ равносильна $\top$. $\dashv$

Следствие 2.2.2. *Для любой непротиворечивой $\Box$-логики $L \supseteq \mathbf{D}$ каноническая шкала логики $L^{\triangleright}$ не является сериальной, и следовательно, не является L-шкалой.*

Доказательство. Множество $\mathbf{Ver}^{\triangleright}$ $L^{\triangleright}$-непротиворечиво, поскольку оно даже $\mathbf{Ver}^{\triangleright}$-непротиворечиво и $L^{\triangleright} \subseteq \mathbf{Ver}^{\triangleright}$. Значит оно содержится в некотором “мире” w канонической шкалы F_L логики $L^{\triangleright}$. Тогда w не имеет $\uparrow$-последователей (и тем самым шкала F_L не сериальна). Действительно, если бы $w{\uparrow}x$, то $\sharp w \subseteq x$, но w содержит $\triangleright A$ для любой формулы A, поэтому $\sharp w = \mathbf{Fm}^{\triangleright}$ и множество x противоречиво. $\dashv$

Далее мы покажем, используя идеи, содержащиеся в статье [17], что добавление к некоторым $\Box$-логикам аксиомы сериальности ($\mathsf{A}^{\Box}_{\mathbf{D}}$) не изменяет логику разрешимости.

Пусть $F = (W, \uparrow)$ — шкала Крипке. Построим шкалу $\widehat{F}$, превратив всякую точку, из которой ничего не $\uparrow$-достижимо, в точку, из которой достижима лишь она сама: $\widehat{F} := (W, \Uparrow)$, где $\Uparrow \, := \, \uparrow \cup \{\langle w, w\rangle \mid w{\uparrow} = \varnothing\}$. Далее для произвольного класса шкал $\mathcal{F}$ обозначим: $\widehat{\mathcal{F}} := \{\widehat{F} \mid F \in \mathcal{F}\}$.

Лемма 2.2.3. *На шкалах F и $\widehat{F}$ общезначимы одни и те же $\triangleright$-формулы.*

Доказательство. Мы покажем, что это верно даже поточечно при любой фиксированной оценке переменных. Пусть $M = (F, \models)$, $\widehat{M} = (\widehat{F}, \models)$. Индукцией по построению $\triangleright$-формулы A покажем, что для любой точки $w \in W$ справедлива эквивалентность: $M, w \models A \Leftrightarrow \widehat{M}, w \models A$. Атомарный и булев случаи очевидны. Пусть теперь $A \equiv \triangleright B$. Возможны варианты:

1) $w\uparrow \neq \varnothing$. Тогда, поскольку $w\uparrow = w\Uparrow$, имеем:

$$M, w \models \triangleright B \Leftrightarrow (\forall x{\downarrow}w \; M, x \models B) \text{ или } (\forall x{\downarrow}w \; M, x \not\models B) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\forall x{\Downarrow}w \; \widehat{M}, x \models B) \text{ или } (\forall x{\Downarrow}w \; \widehat{M}, x \not\models B) \Leftrightarrow \widehat{M}, w \models \triangleright B.$$

2) $w\uparrow = \varnothing$. Тогда $M, w \models \triangleright B$, но и $\widehat{M}, w \models \triangleright B$. $\dashv$

Следствие 2.2.4. *Пусть $\Box$-логика L полна относительно класса шкал $\mathcal{F}$, и пусть $L\mathbf{D}$ обозначает наименьшую логику, содержащую L и аксиому сериальности $(\mathsf{A}^{\Box}_{\mathbf{D}})$. Если $\widehat{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{F}$, то $L\mathbf{D}^{\triangleright} = L^{\triangleright}$.*

Доказательство. Включение $(\supseteq)$ очевидно, докажем обратное.

Пусть $A \in L\mathbf{D}^{\triangleright}$. Очевидны равносильности: $A \in L^{\triangleright} \Leftrightarrow \mathsf{tr}(A) \in L \Leftrightarrow \mathcal{F} \models \mathsf{tr}(A) \Leftrightarrow \mathcal{F} \models A$, поэтому нам остается проверить, что A общезначима на любой L-шкале. Возьмем любую шкалу $F \in \mathcal{F}$. Поскольку $\widehat{F} \in \mathcal{F}$, имеем $\widehat{F} \models L^{\triangleright}$; кроме того, шкала $\widehat{F}$ сериальна, поэтому $\widehat{F} \models (\mathsf{A}^{\Box}_{\mathbf{D}})$. Значит, $\widehat{F} \models L\mathbf{D}$ и $\widehat{F} \models L\mathbf{D}^{\triangleright}$, в частности, $\widehat{F} \models A$. По лемме 2.2.3 это равносильно $F \models A$, что и требовалось. $\dashv$

В частности, заключение доказанного утверждения справедиво для логик $L = \mathbf{K\Sigma}$, где $\mathbf{\Sigma} \subseteq \{\mathbf{4}, \mathbf{5}\}$, поскольку свойства транзитивности и евклидовости сохраняются при переходе от шкалы F к $\widehat{F}$. Для $\mathbf{\Sigma} = \varnothing$ утвеждение было получено в статье [17]. Итак, мы нашли аксиоматику логики эпистемической разрешимости: $\mathbf{KD45}^{\triangleright} = \mathbf{K45}^{\triangleright}$.

Заметим, что мы ограничились построением лишь гильбертовской аксиоматики для логики эпистемической разрешимости $\mathbf{KD45}^{\triangleright} = \mathbf{K45}^{\triangleright}$. Секвенциальные исчисления для логик $\mathbf{K}^{\triangleright}$ и $\mathbf{K4}^{\triangleright}$ будут представлены в главе 3. Имеется недоказанная гипотеза, что для секвенциальной формулировки логик $\mathbf{K5}^{\triangleright}$ и $\mathbf{K45}^{\triangleright}$ можно использовать следующие правила:

$$(\Rightarrow^{\triangleright}_{\mathbf{K5}})\ \frac{\Pi \Rightarrow \triangleright\Sigma, A}{\triangleright(\Pi \vee A) \Rightarrow \triangleright\Sigma, \triangleright A}; \qquad (\Rightarrow^{\triangleright}_{\mathbf{K45}})\ \frac{\Pi, \triangleright\Lambda \Rightarrow \triangleright\Sigma, A}{\triangleright(\Pi \vee A), \triangleright\Lambda \Rightarrow \triangleright\Sigma, \triangleright A}.$$

Глава 3.

Секвенциальная логика арифметической разрешимости

Изучение одного из центральных понятий математической логики — доказуемости — средствами модальной логики восходит к работам И. Орлова [6] и К. Гёделя [15]. Независимо друг от друга они сформулировали модальную систему, известную сейчас как **S4**, оставив открытым вопрос об ее формальной доказуемостной интерпретации (на самом деле, логика **S4** неполна и даже несовместна с „правильной“ логикой доказуемости). Возникла задача описания всех модальных законов, справедливых при интерпретации формул вида $\Box A$ как „утверждение A доказуемо в арифметике Пеано **PA**“. Несколько позже М. Лёб [20] предложил новый корректный принцип доказуемости (так называемую аксиому Лёба), и появилась система, называемая теперь логикой Гёделя-Лёба **GL**, относительно которой была высказана гипотеза, что **GL** описывает в точности все законы доказуемости в **PA**. Наконец, Р. Соловэй [30] подтвердил данную гипотезу, доказав арифметическую полноту логики **GL**.

Напомним, что утверждение называется *разрешимым* в теории, если в ней доказуемо либо оно, либо его отрицание. В настоящей главе мы построим гильбертовскую аксиоматику логики разрешимости над логикой Гёделя–Лёба **GL**, т. е. логики, полной при интерпретации формул вида

$\rhd A$ как 'арифметический перевод утверждения A разрешим в **PA**'. Кроме этого будут представлены секвенциальные исчисления для логик разрешимости над **K**, **K4** и **GL**. Поскольку $\mathbf{D}^\rhd = \mathbf{K}^\rhd$ и $\mathbf{KD4}^\rhd = \mathbf{K4}^\rhd$, как было доказано в главе 2 (см. следствие 2.2.4), то секвенциальные исчисления для $\mathbf{K}^\rhd$ и $\mathbf{K4}^\rhd$ являются одновременно и исчислениями для $\mathbf{D}^\rhd$ и $\mathbf{KD4}^\rhd$.

3.1. Аксиоматические системы

Исчисление гильбертовского типа для логики разрешимости над **GL** получается добавлением к исчислению $\mathbf{K4}^\rhd$ аксиомы: $\mathbf{GL}^\rhd = \mathbf{K4}^\rhd + (\mathsf{A}^\rhd_{\mathbf{L}})$, где $(\mathsf{A}^\rhd_{\mathbf{L}})$ есть $\rhd(\rhd p \to p) \to \rhd p$.

Гипотеза: аксиому $(\mathsf{A}^\rhd_{\mathbf{4}})$ в формулировке $\mathbf{GL}^\rhd$ можно опустить.

Секвенциальное исчисление $[L^\rhd]$ для логики $L^\rhd$, где $L \in \{\mathbf{K}, \mathbf{K4}, \mathbf{GL}\}$, получается добавлением к секвенциальному исчислению высказываний (с сечением) правил $(^\rhd_\neg\Rightarrow)$, $(\Rightarrow^\rhd_\neg)$, $(\Rightarrow^\rhd_\vee)$, $(\Rightarrow^\rhd_\leftrightarrow)$ и $(\Rightarrow^\rhd_L)$, представленных на рис. 3.1. При формулировке правил $(\Rightarrow^\rhd_L)$ используется обозначение: $(\Pi \vee A) := \{(\pi \vee A) \mid \pi \in \Pi\}$.

$$(^\rhd_\neg\Rightarrow)\ \frac{\rhd A, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\rhd\neg A, \Pi \Rightarrow \Sigma} \qquad (\Rightarrow^\rhd_\neg)\ \frac{\Pi \Rightarrow \Sigma, \rhd A}{\Pi \Rightarrow \Sigma, \rhd\neg A}$$

$$(\Rightarrow^\rhd_\vee)\ \frac{\Pi \Rightarrow \Sigma, \rhd A}{\Pi \Rightarrow \Sigma, \rhd(B \to A), \rhd(A \to C)}$$

$$(\Rightarrow^\rhd_\leftrightarrow)\ \frac{\Pi, A \Rightarrow B, \Sigma \quad \Pi, B \Rightarrow A, \Sigma}{\Pi, \rhd A \Rightarrow \rhd B, \Sigma}$$

$$(\Rightarrow^\rhd_{\mathbf{K}})\ \frac{\Pi \Rightarrow A}{\rhd(\Pi \vee A) \Rightarrow \rhd A}$$

$$(\Rightarrow^\rhd_{\mathbf{K4}})\ \frac{\Pi, \rhd\Sigma \Rightarrow A}{\rhd(\Pi \vee A), \rhd\Sigma \Rightarrow \rhd A}$$

$$(\Rightarrow^\rhd_{\mathbf{GL}})\ \frac{\rhd A, \Pi, \rhd\Sigma \Rightarrow A}{\rhd(\Pi \vee A), \rhd\Sigma \Rightarrow \rhd A}$$

Рис. 3.1. Правила для исчислений $L^\rhd$.

При доказательстве полноты аксиоматики логики разрешимости над $\mathbf{GL}$ нам потребуется следующая лемма (только для ее доказательства нужна аксиома $(\mathsf{A}_4^{\rhd})$ в формулировке исчисления $\mathbf{GL}^{\rhd}$).

Лемма 3.1.1. $\mathbf{K4}^{\rhd} \vdash \rhd(p \vee q) \to \rhd[p \vee (\rhd q \to q)]$.

Доказательство. Поскольку полнота аксиоматики $\mathbf{K4}^{\rhd}$ уже доказана (см. теорему 2.1.2), то мы можем для простоты рассуждений[1] строить вывод не в $\mathbf{K4}^{\rhd}$, а в $\mathbf{K4}$.

С одной стороны: $\mathbf{K} \vdash \Box(p \vee q) \to \Box[p \vee (\rhd q \to q)]$ по монотонности. С другой:

$$\mathbf{K4} \vdash \Box\neg(p \vee q) \longleftrightarrow \Box(\neg p \mathbin{\&} \neg q) \longleftrightarrow [\Box\neg p \mathbin{\&} \Box\neg q] \longrightarrow$$
$$\to [\Box\neg p \mathbin{\&} \Box\neg q \mathbin{\&} \Box\Box\neg q] \longrightarrow [\Box\neg p \mathbin{\&} \Box\neg q \mathbin{\&} \Box\rhd q] \longleftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \Box(\neg p \mathbin{\&} \neg q \mathbin{\&} \rhd q) \longleftrightarrow \Box\neg[p \vee (\rhd q \to q)] \longrightarrow \rhd[p \vee (\rhd q \to q)].$$

По правилам логики высказываний получаем: $\mathbf{K} \vdash \rhd(p \vee q) \to \Box[p \vee (\rhd q \to q)]$, откуда и следует требуемое. $\dashv$

3.2. Полнота аксиоматик

Доказательство теоремы 3.2.1 основано на комбинации, с одной стороны, (несколько модифицированной) конструкции канонической модели, приспособленной в работах [17, 19] для применения к $\rhd$-логикам, а с другой стороны, метода пополнения секвенций, применяемого для доказательства полноты секвенциальных исчислений.

Теорема 3.2.1 (Полнота секвенциальных исчислений).

Для каждой логики $L \in \{\mathbf{K}, \mathbf{K4}, \mathbf{GL}\}$ и любой секвенции $\Pi \Rightarrow \Sigma$ в $\rhd$-языке эквивалентны следующие утверждения:

(1) $[L^{\rhd}] \vdash \Pi \Rightarrow \Sigma$,

(2) $L^{\rhd} \vdash \bigwedge\Pi \to \bigvee\Sigma$,

(3) $L \vdash \mathsf{tr}(\bigwedge\Pi \to \bigvee\Sigma)$,

(4) $F \models \Pi \Rightarrow \Sigma$ *для любой конечной L-шкалы F.*

[1] На самом деле, пока не удалось построить вывод непосредственно в $\mathbf{K4}^{\rhd}$.

Доказательство проведем по схеме $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Leftrightarrow (4) \Rightarrow (1)$. Эквивалентность $(3) \Leftrightarrow (4)$ представляет собой известную (см. [11, 12]) теорему о полноте логик L относительно классов конечных L-шкал (см. также описание этих классов на стр. 15 настоящей работы). До конца доказательства $\rhd$-формулы будем называть просто формулами.

$\underline{(1) \Rightarrow (2)}$ В построенных ниже выводах используется следующий факт из логики высказываний: если в некоторой логике доказуема импликация $P \to A$, то в ней доказуема и эквивалентность $[P \vee A] \leftrightarrow A$.

Далее мы считаем, что $\Pi = \{\pi_1, \ldots, \pi_m\}$ и $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$, где $m, n \geqslant 0$.

$\underline{L = \mathbf{K}}$. Пусть $\mathbf{K}^{\rhd} \vdash \bigwedge\Pi \to A$. Используя последовательно лемму 2.1.1, аксиому $(\mathsf{A}^{\rhd}_{\leftrightarrow})$ и упомянутый выше факт, получаем следующий вывод:

$$\mathbf{K}^{\rhd} \vdash \bigwedge\rhd(\pi_i \vee A) \longrightarrow \rhd[\bigwedge(\pi_i \vee A)] \longleftrightarrow \rhd(\bigwedge\Pi \vee A) \longleftrightarrow \rhd A.$$

$\underline{L = \mathbf{K4}}$. Пусть $\mathbf{K4}^{\rhd} \vdash \bigwedge(\Pi, \rhd\Sigma) \to A$. Тогда, пользуясь аксиомой $(\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{4}})$, которую можно эквивалентным образом представить в виде $\rhd\sigma \to \rhd(A \vee \rhd\sigma)$, выводим:

$$\mathbf{K4}^{\rhd} \vdash [\bigwedge\rhd(\pi_i \vee A)\ \&\ \bigwedge\rhd\sigma_j] \longrightarrow [\rhd(\bigwedge\pi_i \vee A)\ \&\ \bigwedge\rhd(A \vee \rhd\sigma_j)] \longrightarrow$$
$$\to [\rhd(\bigwedge\Pi \vee A)\ \&\ \rhd(\bigwedge\rhd\Sigma \vee A)] \longrightarrow \rhd[\bigwedge(\Pi, \rhd\Sigma) \vee A] \longleftrightarrow \rhd A.$$

$\underline{L = \mathbf{GL}}$. Пусть $\mathbf{GL}^{\rhd} \vdash \bigwedge(\Pi, \rhd\Sigma) \to (\rhd A \to A)$. Выше мы доказали, что

$$\mathbf{K4}^{\rhd} \vdash [\bigwedge\rhd(\pi_i \vee A)\ \&\ \bigwedge\rhd\sigma_j] \longrightarrow \rhd[\bigwedge(\Pi, \rhd\Sigma) \vee A].$$

Пользуясь леммой 3.1.1, имеем:

$$\mathbf{K4}^{\rhd} \vdash \rhd[\bigwedge(\Pi, \rhd\Sigma) \vee A] \longrightarrow \rhd[\bigwedge(\Pi, \rhd\Sigma) \vee (\rhd A \to A)].$$

Наконец, используя аксиому Лёба $(\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{L}})$, окончательно получаем:

$$\mathbf{GL}^{\rhd} \vdash \rhd[\bigwedge(\Pi, \rhd\Sigma) \vee (\rhd A \to A)] \longleftrightarrow \rhd(\rhd A \to A) \longrightarrow \rhd A.$$

$\underline{(2) \Rightarrow (3)}$ Для логик $\mathbf{K}$ и $\mathbf{K4}$ импликация доказана в теореме 2.1.2.

$\underline{L = \mathbf{GL}}$. Выведем tr-перевод аксиомы $(\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{L}})$ в логике $\mathbf{GL}$.

С одной стороны, из подстановочного примера тавтологии $(\rhd p \to p) \to (\Box p \to p)$ получаем:

$$\mathbf{GL} \vdash \Box(\rhd p \to p) \longrightarrow \Box(\Box p \to p) \longrightarrow \Box p \longrightarrow \rhd p.$$

С другой стороны,

$\mathbf{GL} \vdash \Box\neg(\rhd p \to p) \longleftrightarrow \Box(\rhd p \,\&\, \neg p) \longrightarrow \Box\neg p \longrightarrow \rhd p.$

<u>(4) ⇒ (1)</u> Обозначим секвенциальное исчисление $\mathcal{L} := [L^{\rhd}]$. Введем обозначение

$$\overline{A} := \begin{cases} B, & \text{если } A \text{ графически равна } \neg B; \\ \neg A, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Далее, для множества формул Γ обозначим $\overline{\Gamma} := \{\overline{A} \mid A \in \Gamma\}$. Множество Γ назовем *замкнутым*, если $\mathrm{Sb}\,\Gamma \subseteq \Gamma$ и $\overline{\Gamma} \subseteq \Gamma$. Очевидно, что всякое конечное множество формул содержится в некотором *конечном* замкнутом множестве. Секвенцию w назовем Γ-*полной*, если $\Gamma \subseteq w$; *тонкой*, если ее антецедент и сукцедент являются множествами, т.е. формулы в них не повторяются.

Допустим, что $\mathcal{L} \nvdash \Pi \Rightarrow \Sigma$. Положим:

$$\begin{aligned} \Gamma &:= \mathrm{Sb}\,\Pi\Sigma, \\ \natural\Gamma &:= \{A, \overline{A} \mid \rhd A \in \Gamma\}, \\ \beta &:= \Gamma \cup \mathrm{Sb}\{\rhd(A \vee B) \mid A, B \in \natural\Gamma\}, \\ \widehat{\Gamma} &:= \beta \cup \overline{\beta}. \end{aligned}$$

Очевидно, что множество $\widehat{\Gamma}$ конечно и замкнуто. Далее, для формулы $A \in \natural\Gamma$ обозначим:

$$\boxtimes A := \{\rhd(B \vee A) \mid B \in \natural\Gamma\} \subseteq \beta.$$

В отличие от ситуации, которая имела место в доказательстве теоремы 2.1.2, нам потребовалось "ограничить" множество формул, которые пробегает B в определении оператора $\boxtimes$, замкнутым конечным множеством $\natural\Gamma$.

Теперь мы готовы построить конечную контрмодель для секвенции $\Pi \Rightarrow \Sigma$. Носитель модели: $W^{\Gamma}_{\mathcal{L}} := \{w \subseteq \widehat{\Gamma} \mid w$ есть тонкая $\widehat{\Gamma}$-полная секвенция, $\mathcal{L} \nvdash w\}$. Очевидно, что $W^{\Gamma}_{\mathcal{L}}$ — конечное множество.

Лемма 3.2.2 (О пополнении). *Всякую невыводимую в $\mathcal{L}$ секвенцию $\Pi \Rightarrow \Sigma$, состоящую из формул множества Γ, можно расширить до $\widehat{\Gamma}$-полной невыводимой в $\mathcal{L}$ секвенции. Формально, если $\Pi\Sigma \subseteq \Gamma$ и $\mathcal{L} \nvdash \Pi \Rightarrow \Sigma$, то $\exists w \in W^\Gamma_\mathcal{L}$: $\Pi \subseteq \langle w|$, $\Sigma \subseteq |w\rangle$.*

Доказательство проводится стандартным методом пополнения: пусть $\mathcal{L} \nvdash \Pi \Rightarrow \Sigma$; для каждой формулы A, такой что $A \notin \Pi\Sigma$ и $A \in \mathrm{Sb}\,\Pi\Sigma$ (их конечное число), ввиду наличия в исчислении $\mathcal{L}$ сечения (и сокращения) имеем $\mathcal{L} \nvdash \Pi \Rightarrow \Sigma A$ или $\mathcal{L} \nvdash A\Pi \Rightarrow \Sigma$, поэтому A можно добавить в антецедент или сукцедент секвенции $\Pi \Rightarrow \Sigma$. Процесс продолжается, пока секвенция $\Pi \Rightarrow \Sigma$ не станет полной. $\dashv$

Поскольку исходная секвенция $\Pi \Rightarrow \Sigma$ невыводима в $\mathcal{L}$, она содержится в некотором "мире" $w \in W^\Gamma_\mathcal{L}$, и следовательно, $W^\Gamma_\mathcal{L} \neq \varnothing$.

Зададим оценку переменных: $w \models p \;\leftrightharpoons\; p \in \langle w|$, для любых $w \in W^\Gamma_\mathcal{L}$ и $p \in \mathrm{Var}$.

Мы построим отношение $\uparrow$ так, чтобы выполнялось следующее условие:

$$\langle 1^\triangleright \rangle \qquad \forall w \in W^\Gamma_\mathcal{L}\ \forall A \in \Gamma. \qquad w \models A \Leftrightarrow A \in \langle w|.$$

Лемма 3.2.3. *Если $\langle 1^\triangleright \rangle$, то для любых $\Pi\Sigma \subseteq \Gamma$ из $\mathcal{L} \nvdash \Pi \Rightarrow \Sigma$ следует $M^\Gamma_\mathcal{L} \not\models \Pi \Rightarrow \Sigma$.*

▶ По лемме о пополнении $\Pi \subseteq \langle w|$ и $\Sigma \subseteq |w\rangle$ для некоторого $w \in W^\Gamma_\mathcal{L}$. По $\langle 1^\triangleright \rangle$ имеем $w \models \bigwedge\Pi$ и $w \models \bigwedge\neg\Sigma$, т. е. $w \not\models \Pi \Rightarrow \Sigma$. ◀

Условие $\langle 1^\triangleright \rangle$ на $\uparrow$ сформулировано в виде связи отношения $\models$ и принадлежности формул антецедентам секвенций из $W^\Gamma_\mathcal{L}$. В определении истинности формулы в точке зависимость от $\uparrow$ имеется лишь в пункте, касающемся модальности $\triangleright$. Поэтому достаточно наложить на $\uparrow$ следующее условие, которое связывает уже $\uparrow$ и принадлежность формул вида $\triangleright B$ антецедентам секвенций из $W^\Gamma_\mathcal{L}$ (квадратная скобка означает дизъюнкцию условий):

$$\langle 2^{\triangleright}\rangle \qquad \forall w\in W^{\Gamma}_{\mathcal{L}}\ \forall\,\triangleright B\in\Gamma. \qquad \triangleright B\in\langle w| \ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\forall x{\downarrow}w & B\in\langle x|,\\ \forall x{\downarrow}w & B\in|x\rangle.\end{array}\right.$$

Лемма 3.2.4. $\langle 2^{\triangleright}\rangle \Rightarrow \langle 1^{\triangleright}\rangle$.

▶ Доказательство проведем одновременно для всех $w\in W^{\Gamma}_{\mathcal{L}}$ индукцией по построению формулы A. При $A\equiv\bot$ левая и правая части $\langle 1^{\triangleright}\rangle$ ложны. Для $A\equiv p$ утверждение следует из определения $\models$.

Пусть $A\equiv(B\to C)$. Поскольку множество $\widehat{\Gamma}$ замкнуто, $B,C\in\widehat{\Gamma}$. Ввиду $\widehat{\Gamma}$-полноты секвенции w и предположения индукции имеем:

$$\begin{array}{ll}\textbf{(b)} & w\models B\Leftrightarrow B\in\langle w|;\quad w\not\models B\Leftrightarrow B\in|w\rangle;\\ \textbf{(c)} & w\models C\Leftrightarrow C\in\langle w|;\quad w\not\models C\Leftrightarrow C\in|w\rangle.\end{array}$$

Отсюда:

$$w\models(B\to C)\overset{\mathrm{def}\models}{\Longleftrightarrow}\left[\begin{array}{l}w\not\models B\\ w\models C\end{array}\right.\overset{\textbf{(b,c)}}{\Longleftrightarrow}\left[\begin{array}{l}B\in|w\rangle\\ C\in\langle w|\end{array}\right.\overset{(?)}{\Longleftrightarrow}(B\to C)\in\langle w|.$$

Докажем эквивалентность, помеченную (?).

($\Rightarrow$) Если $(B\to C)\in|w\rangle$, то $B\notin|w\rangle$ и $C\notin\langle w|$, поскольку секвенции $\Rightarrow B,(B\to C)$ и $C\Rightarrow(B\to C)$ доказуемы в $\mathcal{L}$.

($\Leftarrow$) Если $(B\to C)\in\langle w|$, то невозможно одновременно $B\in\langle w|$ и $C\in|w\rangle$, ибо секвенция $(B\to C),B\Rightarrow C$ доказуема в $\mathcal{L}$.

Наконец, пусть $A\equiv\triangleright B$. По предположению индукции для любого $x\in W^{\Gamma}_{\mathcal{L}}$ имеем

$$\textbf{(x)}\qquad x\models B\Leftrightarrow B\in\langle x|;\qquad x\not\models B\Leftrightarrow B\in|x\rangle.$$

Отсюда:

$$\triangleright B\in\langle w|\overset{\langle 2^{\triangleright}\rangle}{\Longleftrightarrow}\left[\begin{array}{ll}\forall x{\downarrow}w & B\in\langle x|\\ \forall x{\downarrow}w & B\in|x\rangle\end{array}\right.\overset{\textbf{(x)}}{\Longleftrightarrow}\left[\begin{array}{ll}\forall x{\downarrow}w & x\models B\\ \forall x{\downarrow}w & x\not\models B\end{array}\right.\overset{\mathrm{def}\models}{\Longleftrightarrow} w\models\triangleright B. \blacktriangleleft$$

Прежде чем определить отношение достижимости, введем вспомогательные обозначения. Для любого множества $\Phi \subseteq \natural\Gamma$ обозначим $\sharp\Phi :=$ $\{A \in \natural\Gamma \mid \boxtimes A \subseteq \Phi\}$. Легко проверить, что справедливы следующие включения:

$$\sharp\boxtimes\Phi \supseteq \Phi, \qquad \boxtimes\sharp\Phi \subseteq \Phi.$$

Для $w \in W^{\Gamma}_{\mathcal{L}}$ положим: $\sharp w := \sharp\langle w|$. Теперь зададим отношение $\uparrow$ следующим образом (фигурная скобка означает конъюнкцию условий):

$\langle 3^{\rhd}_{\mathbf{K}}\rangle$ $$w{\uparrow}x \ \leftrightharpoons\ \sharp w \subseteq \langle x|.$$

$\langle 3^{\rhd}_{\mathbf{4}}\rangle$ $$w{\uparrow}x \ \leftrightharpoons\ \sharp w \subseteq (\sharp x \cap \langle x|).$$

$\langle 3^{\rhd}_{\mathbf{L}}\rangle$ $$w{\uparrow}x \ \leftrightharpoons\ \begin{cases} \sharp w \subseteq (\sharp x \cap \langle x|) \\ \exists C \in \natural\Gamma\colon \quad \rhd C \in |w\rangle \ \&\ \rhd C \in \langle x|. \end{cases}$$

Лемма 3.2.5 (О дихотомии). *Для любого $w \in W^{\Gamma}_{\mathcal{L}}$ и любой формулы $\rhd A \in \Gamma$ справедливо: если $\rhd A \in \langle w|$, то ($A \in \sharp w$ или $\overline{A} \in \sharp w$).*

▶ Допустим противное, тогда ввиду $A \in \natural\Gamma$ получаем:

1) $\boxtimes A \not\subseteq \langle w|$, т. е. $\exists B \in \natural\Gamma$: $\rhd(B \vee A) \notin \langle w|$, но так как $\rhd(B \vee A) \in \beta$, то $\rhd(B \vee A) \in |w\rangle$.

2) $\boxtimes\overline{A} \not\subseteq \langle w|$, т. е. $\exists C \in \natural\Gamma$: $\rhd(C \vee \overline{A}) \notin \langle w|$, но так как $\rhd(C \vee \overline{A}) \in \beta$, то $\rhd(C \vee \overline{A}) \in |w\rangle$.

Однако $\mathcal{L} \vdash \rhd A \Rightarrow \rhd(B \vee A), \rhd(C \vee \overline{A})$; данную секвенцию можно получить по правилу $(\Rightarrow^{\rhd}_{\vee})$, учитывая, что из $\mathcal{L} \vdash (B \vee A) \Leftrightarrow (\neg B \to A)$ по правилу $(\Rightarrow^{\rhd}_{\leftrightarrow})$ выводится, что $\mathcal{L} \vdash \rhd(B \vee A) \Leftrightarrow \rhd(\neg B \to A)$, и аналогично $\mathcal{L} \vdash \rhd(C \vee \overline{A}) \Leftrightarrow \rhd(A \to C)$. Таким образом, $\mathcal{L} \vdash w$, что противоречит условию. ◀

Лемма 3.2.6. *Из $\langle 3^{\rhd}_{\mathfrak{S}}\rangle$ следует $\langle 2^{\rhd}\rangle(\Rightarrow)$, для каждого $\mathfrak{S} \in \{\mathbf{K}, \mathbf{4}, \mathbf{L}\}$.*

▶ Берем $w \in W^\Gamma_{\mathcal{L}}$, $\rhd A \in \Gamma$. Пусть $\rhd A \in \langle w|$. Тогда по дихотомии возможны два случая:

1) $A \in \sharp w$, тогда по $\langle 3^{\rhd}_{L}\rangle(\rightharpoondown)$ заключаем: $\forall x{\downarrow}w\ A \in \langle x|$.

2) $\overline{A} \in \sharp w$, тогда аналогично $\forall x{\downarrow}w\ \overline{A} \in \langle x|$. Но поскольку $A \in \natural\Gamma \subseteq \widehat{\Gamma}$, то $A \in x$ в силу $\widehat{\Gamma}$-полноты x; однако невозможно $A \in \langle x|$, иначе $\mathcal{L} \vdash x$. Значит, $A \in |x\rangle$. ◀

Лемма 3.2.7 (Основная для $L = \mathbf{K}$). $\langle 3^{\rhd}_{\mathbf{K}}\rangle \Rightarrow \langle 2^{\rhd}\rangle$.

▶ Осталось доказать $\langle 2^{\rhd}\rangle(\Leftarrow)$. Берем произвольный $w \in W^\Gamma_{\mathcal{L}}$ и формулу $\rhd A \in \Gamma$. Пусть $\rhd A \notin \langle w|$, т. е. $\rhd A \in |w\rangle$.

Возьмем $\Pi := \sharp w$ и докажем, что $\mathcal{L} \nvdash \Pi \Rightarrow A$. Допустим противное, тогда по правилу $(\Rightarrow^{\rhd}_{\mathbf{K}})$ выводим: $\mathcal{L} \vdash \rhd(\Pi \vee A) \Rightarrow \rhd A$. Далее, поскольку $\forall\pi \in \Pi$ справедливо $\pi \in \sharp w$, т. е. $\boxtimes\pi \subseteq w$, то $\forall\alpha \in \natural\Gamma\colon \rhd(\alpha \vee \pi) \in \langle w|$. Ввиду очевидной выводимости $\mathcal{L} \vdash \rhd(\alpha \vee \pi) \Leftrightarrow \rhd(\pi \vee \alpha)$, отсюда получаем: $\forall\alpha \in \natural\Gamma\colon \rhd(\pi \vee \alpha) \in \langle w|$. В частности, для $\alpha := A$ заключаем: $\rhd(\pi \vee A) \in \langle w|$. Таким образом, $\rhd(\Pi \vee A) \subseteq \langle w|$, $\rhd A \in |w\rangle$ и $\mathcal{L} \vdash \rhd(\Pi \vee A) \Rightarrow \rhd A$; следовательно, $\mathcal{L} \vdash w$, что противоречит условию.

Аналогично, $\mathcal{L} \nvdash \Pi, A \Rightarrow$, иначе $\mathcal{L} \vdash \Pi \Rightarrow \overline{A}$ и проходят все те же рассуждения, что и выше, с учетом того, что $\overline{A} \in \natural\Gamma$ и $\rhd\overline{A} \in |w\rangle$. Теперь погружаем секвенции $\Pi, A \Rightarrow$ и $\Pi \Rightarrow A$ в $\widehat{\Gamma}$-полные секвенции $x, y \in W^\Gamma_{\mathcal{L}}$. Тогда $w{\uparrow}x, y$, поскольку $\sharp w = \Pi \subseteq \langle x|, \langle y|$. И по построению имеем: $A \in \langle x|$, $A \in |y\rangle$. ◀

Лемма 3.2.8 (Основная для $L = \mathbf{K4}$). $\langle 3^{\rhd}_{\mathbf{4}}\rangle \Rightarrow \langle 2^{\rhd}\rangle$.

▶ Берем $w \in W^\Gamma_{\mathcal{L}}$. Пусть, как и выше, $\rhd A \in |w\rangle$.

Возьмем $\Pi := \sharp w$, $\Phi := \boxtimes\Pi$. Тогда $\mathcal{L} \nvdash \Pi\Phi \Rightarrow A$, иначе по правилу $(\Rightarrow^{\rhd}_{\mathbf{K4}})$ выводим: $\mathcal{L} \vdash \rhd(\Pi \vee A), \Phi \Rightarrow \rhd A$, поскольку $\Phi = \rhd\Sigma$ для некоторого Σ. Как и в лемме 3.2.7, имеем $\rhd(\Pi \vee A) \subseteq \langle w|$. Кроме того, $\Phi = \boxtimes\sharp w \subseteq \langle w|$. Поэтому $\mathcal{L} \vdash w$, что невозможно.

Погружаем секвенцию $\Pi\Phi \Rightarrow A$ в некоторый $y \in W_{\mathcal{L}}^{\Gamma}$ (это возможно по лемме о пополнении, поскольку данная секвенция содержится во множестве $\widehat{\Gamma}$). Остается проверить, что $w{\uparrow}y$. Имеем: $\sharp w = \Pi \subseteq \langle y|$, $\sharp w = \Pi \subseteq \sharp\boxtimes\Pi = \sharp\Phi \subseteq \sharp y$, поскольку $\Phi \subseteq \langle y|$.

Аналогично доказывается, что $\mathcal{L} \not\vdash \Pi\Phi A \Rightarrow$ и строится требуемый x.

◀

Лемма 3.2.9 (Основная для $L = \mathbf{GL}$). $\langle 3^{\triangleright}_{\mathbf{GL}}\rangle \Rightarrow \langle 2^{\triangleright}\rangle$.

▶ Берем $w \in W_{\mathcal{L}}^{\Gamma}$. Пусть $\triangleright A \in |w\rangle$. Как и в лемме 3.2.8, строим Π, Φ, доказываем, что секвенция $\triangleright A, \Pi, \Phi \Rightarrow A$ невыводима в $\mathcal{L}$ и погружаем эту секвенцию в $y \in W_{\mathcal{L}}^{\Gamma}$. Как и предыдущей лемме, можно доказать, что $\sharp w \subseteq (\sharp y \cap \langle y|)$; остается заметить, что взяв $C := A$, мы получим: $\triangleright C \in |w\rangle$ и $\triangleright C \in \langle y|$. Тем самым, $w{\uparrow}y$. Аналогично строим x. ◀

Нам осталось проверить, что построенная конечная шкала $F_{\mathcal{L}}^{\Gamma}$ является L-шкалой. Случай $L = \mathbf{K}$ тривиален.

Случай $L = \mathbf{K4}$: если $w{\uparrow}x{\uparrow}y$, то $\sharp w \subseteq (\sharp x \cap \langle x|) \subseteq \sharp x \subseteq (\sharp y \cap \langle y|)$ и $w{\uparrow}y$; значит, отношение $\uparrow$ транзитивно.

Случай $L = \mathbf{GL}$: иррефлексивность отношения $\uparrow$ следует из второй строки определения $\langle 3^{\triangleright}_{\mathbf{L}}\rangle$ и невыводимости рассматриваемых секвенций в $\mathcal{L}$. Докажем транзитивность отношения $\uparrow$.

Пусть $w{\uparrow}x{\uparrow}y$, тогда аналогично $\sharp w \subseteq (\sharp y \cap \langle y|)$. Далее, $\exists C \in \natural\Gamma$: $\triangleright C \in |w\rangle$ и $\triangleright C \in \langle x|$. Покажем, что $\triangleright C \in \langle y|$. По лемме о дихотомии, возможны варианты:

а) $C \in \sharp x$, но $\sharp x \subseteq \sharp y$, поэтому $C \in \sharp y$, в частности, $\triangleright(C \vee C) \in y$. Ввиду выводимости $\mathcal{L} \vdash \triangleright(C \vee C) \Leftrightarrow \triangleright C$, получаем $\triangleright C \in \langle y|$.

б) $\overline{C} \in \sharp x$. Этот случай рассматривается аналогично, поскольку $\overline{C} \in \natural\Gamma$ и имеет место выводимость $\mathbf{K}^{\triangleright} \vdash \triangleright C \leftrightarrow \triangleright\overline{C}$.

Теорема полностью доказана. $\dashv$

Нами не изучен вопрос об устранимости сечения и свойстве подформульности в секвенциальных исчислениях для логик $\mathbf{K\Sigma}^{\rhd}$, $\mathbf{\Sigma} \subseteq \{\mathbf{4}, \mathbf{5}\}$ (см. замечания в конце раздела 2.2) и $\mathbf{GL}^{\rhd}$. Для этого, возможно, потребуется другая формулировка модальных секвенциальных правил в этих исчислениях. Заметим в этой связи, что для любой логики разрешимости корректно следующее правило вывода

$$\frac{A \Rightarrow B \qquad B \Rightarrow C}{\rhd B \Rightarrow \rhd A, \rhd C},$$

сохраняющее свойство подформульности. Вероятно, это правило можно взять вместо более сложного правила $(\Rightarrow^{\rhd}_{\vee})$. Кроме того, для логики $\mathbf{GL}^{\rhd}$ корректно также правило

$$(\Rightarrow^{\rhd}_{\mathbf{L}})\ \frac{\rhd A, \Pi \Rightarrow A}{\rhd \Pi \Rightarrow \rhd A}.$$

Глава 4.

Секвенциальные рефлексивные логики разрешимости

Эта глава посвящена изучению логик оператора разрешимости над $\Box$-логиками L, содержащими аксиому рефлексивности $\Box p \to p$ (мы будем называть их *рефлексивными логиками разрешимости*). Исследование таких логик базируется на очевидном факте выразимости оператора $\Box$ через оператор $\rhd$ посредством равенства $\Box p = p \mathbin{\&} \rhd p$. Ввиду этого обстоятельства построение гильбертовских аксиоматик данных логик разрешимости становится автоматическим (см. лемму 4.4.4) и потому не представляет большого интереса (за исключением, быть может, вопросов выбора удобной в каком-либо смысле системы аксиом). Напротив, построение секвенциальных исчислений для этих логик, обладающих "хорошими" структурными свойствами (устранимость сечения, свойство подформульности и т. п.), имеет определенный смысл.

4.1. Аксиоматические системы

Аксиоматика гильбертовского типа для минимальной рефлексивной логики разрешимости $\mathbf{T}^{\rhd}$ состоит из следующих аксиом и правил вывода:

($\mathsf{A}^{\rhd}_{\top}$) классические тавтологии в $\rhd$-языке

($\mathsf{A}^{\rhd}_{\neg}$) $\rhd p \leftrightarrow \rhd\neg p$ (зеркальность)

($\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{T}}$) $p \to [\rhd(p \to q) \to (\rhd p \to \rhd q)]$ (слабая дистрибутивность)

$$(\mathsf{MP})\ \frac{A \quad A \to B}{B} \qquad (\mathsf{Sub})\ \frac{A}{A[B/p]} \qquad (\mathsf{Dec})\ \frac{A}{\rhd A}$$

Аксиомы, необходимые для формулировки остальных исчислений $L^{\rhd}$, выписаны на рис. 4.1 (названия некоторых из аксиом объясняются доказываемыми в главе 5 теоремой 5.2.1, следствием 5.2.2 и теоремой 5.2.3).

($\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{4}\flat}$) $\rhd p \to \rhd\rhd p$ ($\flat$-транзитивность)

($\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{5}\flat}$) $\rhd\rhd p$ ($\flat$-евклидовость)

($\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{5}'}$) $\rhd(\rhd p \to p)$ (слабая евклидовость)

($\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{B}}$) $p \to \rhd(\rhd p \to p)$ (симметричность)

($\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{G}}$) $\rhd(\rhd(p \to \rhd p) \to p) \to \rhd p$ (аксиома Гжегорчика)

Рис. 4.1. Аксиомы рефлексивных логик разрешимости.

Гильбертовские аксиоматики рефлексивных логик разрешимости:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{\rhd} &= \mathbf{T}^{\rhd} + (\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{B}}), \\ \mathbf{S4}^{\rhd} &= \mathbf{T}^{\rhd} + (\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{4}\flat}), \\ \mathbf{S5}^{\rhd} &= \mathbf{T}^{\rhd} + (\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{5}\flat}) = \mathbf{T}^{\rhd} + (\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{5}'}), \\ \mathbf{Grz}^{\rhd} &= \mathbf{S4}^{\rhd} + (\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{G}}). \end{aligned}$$

Гипотеза: в формулировке $\mathbf{Grz}^{\rhd}$ аксиома ($\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{4}\flat}$) лишняя.

Далее L обозначает одну из логик $\mathbf{T}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{S4}$, $\mathbf{S5}$, $\mathbf{Grz}$.

Лемма 4.1.1.

(а) *Системы* $L^{\triangleright}$ *замкнуты относительно правила эквивалентной замены* ($\mathsf{RE}^{\triangleright}$).

(б) $\mathbf{T}^{\triangleright} \vdash \triangleright p \,\&\, \triangleright q \to \triangleright(p \,\&\, q)$.

Доказательство. **(а)** По правилу (Dec) и аксиоме ($\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{T}}$) из $A \to B$ получаем $A \to (\triangleright A \to \triangleright B)$, а из $\neg A \to \neg B$ сначала $\neg A \to (\triangleright\neg A \to \triangleright\neg B)$, а затем $\neg A \to (\triangleright A \to \triangleright B)$ по аксиоме ($\mathsf{A}^{\triangleright}_{\neg}$). Ввиду $\vdash A \vee \neg A$ из двух полученных формул выводим $\triangleright A \to \triangleright B$. Обратная импликация доказывается аналогично.

(б) Из тавтологии $p \to (q \to p \,\&\, q)$ по аксиоме ($\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{T}}$) получаем $p \,\&\, q \to [\triangleright p \to (\triangleright q \to \triangleright(p \,\&\, q))]$. Из тавтологии $\neg p \to \neg(p \,\&\, q)$ по аксиомам ($\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{T}}$), ($\mathsf{A}^{\triangleright}_{\neg}$) получаем $\neg p \to [\triangleright p \to \triangleright(p \,\&\, q)]$, и тем более, $\neg p \to [\triangleright p \to (\triangleright q \to \triangleright(p \,\&\, q))]$. Аналогично выводится $\neg q \to [\triangleright p \to (\triangleright q \to \triangleright(p \,\&\, q))]$. Наконец, в силу тавтологии $(p \,\&\, q) \vee \neg p \vee \neg q$, заключаем: $\triangleright p \to (\triangleright q \to \triangleright(p \,\&\, q))$, что и требовалось. $\dashv$

Лемма 4.1.2. *Указанные аксиоматики* $\mathbf{S5}^{\triangleright}$ *эквивалентны:* $\mathbf{T}^{\triangleright} + (\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{5}\flat}) = \mathbf{T}^{\triangleright} + (\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{5}'})$.

Доказательство. ($\supseteq$) Во-первых, $\vdash \triangleright\triangleright p \,\&\, \triangleright p \to \triangleright(\triangleright p \,\&\, p)$ по лемме 4.1.1 (б), но поскольку $\vdash \triangleright\triangleright p$ по аксиоме ($\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{5}\flat}$), то $\vdash \triangleright p \to \triangleright(\triangleright p \,\&\, p)$. Во-вторых, из тавтологии $\neg\triangleright p \to \neg(\triangleright p \,\&\, p)$ по аксиоме ($\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{T}}$) получаем $\vdash \neg\triangleright p \,\&\, \triangleright\neg\triangleright p \to \triangleright\neg(\triangleright p \,\&\, p)$, но $\vdash \triangleright\neg\triangleright p$ по ($\mathsf{A}^{\triangleright}_{\neg}$) и ($\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{5}\flat}$), значит $\vdash \neg\triangleright p \to \triangleright(\triangleright p \,\&\, p)$.

Из двух полученных формул ввиду $\vdash \triangleright p \vee \neg\triangleright p$ выводим $\vdash \triangleright(\triangleright p \,\&\, p)$. Подставляя $\neg p$ вместо p и пользуясь правилом ($\mathsf{RE}^{\triangleright}$), получаем $\vdash \triangleright\neg(\triangleright\neg p \,\&\, \neg p)$ и, наконец, $\vdash \triangleright(\triangleright p \to p)$.

($\subseteq$) Пользуясь леммой 4.1.1 (б) и правилом ($\mathsf{RE}^{\triangleright}$), выводим:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}^{\triangleright} \;\vdash\; & \triangleright(\triangleright p \to p) \,\&\, \triangleright(\triangleright\neg p \to \neg p) \longrightarrow \\
& \to \triangleright[(\triangleright p \to p) \,\&\, (\triangleright\neg p \to \neg p)] \longleftrightarrow \\
& \leftrightarrow \triangleright[\triangleright p \to (p \,\&\, \neg p)] \longleftrightarrow \triangleright\neg\triangleright p \longleftrightarrow \triangleright\triangleright p.
\end{aligned}$$

Остается заметить, что посылка полученной импликации доказуема в $\mathbf{T}^{\rhd} + (\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{5}'})$. $\dashv$

Для каждой из рассматриваемых логик L сформулируем два секвенциальных исчисления $[L^{\rhd}_1]$ и $[L^{\rhd}_2]$. Исчисление $[L^{\rhd}_1]$ получается добавлением к секвенциальному исчислению высказываний (с сечением) правил $({}^{\rhd}_{\neg}{\Rightarrow})$, $({\Rightarrow}^{\rhd}_{\neg})$ и $({\Rightarrow}^{\rhd}_{L})$, выписанных на рис. 4.2. При формулировке правила $({\Rightarrow}^{\rhd}_{\mathbf{B}})$ использовано обозначение $(\rhd\Sigma \,\&\, \Sigma) := \{(\rhd\sigma \,\&\, \sigma) \mid \sigma \in \Sigma\}$. Обозначение $(\rhd\Sigma \to \Sigma)$ ниже имеет аналогичный смысл.

$$({}^{\rhd}_{\neg}{\Rightarrow})\ \frac{\rhd A, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\rhd\neg A, \Pi \Rightarrow \Sigma} \qquad ({\Rightarrow}^{\rhd}_{\neg})\ \frac{\Pi \Rightarrow \Sigma, \rhd A}{\Pi \Rightarrow \Sigma, \rhd\neg A}$$

$$({\Rightarrow}^{\rhd}_{\mathbf{T}})\ \frac{\Pi \Rightarrow A}{\Pi, \rhd\Pi \Rightarrow \rhd A} \qquad ({\Rightarrow}^{\rhd}_{\mathbf{B}})\ \frac{\Pi \Rightarrow (\rhd\Sigma \,\&\, \Sigma), A}{\Pi, \rhd\Pi \Rightarrow \Sigma, \rhd A}$$

$$({\Rightarrow}^{\rhd}_{\mathbf{S4}})\ \frac{\Pi, \rhd\Pi \Rightarrow A}{\Pi, \rhd\Pi \Rightarrow \rhd A} \qquad ({\Rightarrow}^{\rhd}_{\mathbf{S5}})\ \frac{\Pi, \rhd\Pi \Rightarrow \rhd\Sigma, A}{\Pi, \rhd\Pi \Rightarrow \rhd\Sigma, \rhd A}$$

$$({\Rightarrow}^{\rhd}_{\mathbf{Grz}})\ \frac{\rhd(A \to \rhd A), \Pi, \rhd\Pi \Rightarrow A}{\Pi, \rhd\Pi \Rightarrow \rhd A}$$

Рис. 4.2. Правила исчислений $[L^{\rhd}_1]$.

Заметим, что правила $({}^{\rhd}_{\neg}{\Rightarrow})$ и $({\Rightarrow}^{\rhd}_{\neg})$ нарушают свойство подформульности. Поэтому теперь мы построим исчисление $[L^{\rhd}_2]$, в котором данные правила поглощены другими. Это исчисление получаем добавлением к секвенциальному исчислению высказываний (с сечением) правил $({\Rightarrow}^{\rhd r}_{L})$, $r \in \{0, 1\}$, указанных на рис. 4.3; при их формулировке используются обозначения: $\overline{r} := 1 - r$, $A^0 := \varnothing$, $A^1 := A$.

Правила $({\Rightarrow}^{\rhd r}_{\mathbf{B}})$, $r \in \{0, 1\}$, имеют $2^{|\Sigma|+|\Sigma'|}$ посылок, отвечающих всевозможным разбиениям мультимножеств $\Sigma = \Phi\Psi$ и $\Sigma' = \Phi'\Psi'$. Вместо них можно было бы рассматривать более простые и в то же время более сильные однопосылочные правила:

$$({\Rightarrow}^{\rhd r}_{\mathbf{B}\star}) \qquad \frac{A^{\overline{r}}, \Pi, (\rhd\Sigma' \to \Sigma') \Rightarrow (\rhd\Sigma \,\&\, \Sigma), \Lambda, A^r}{\Pi, \rhd(\Pi\Lambda), \Sigma' \Rightarrow \Sigma, \Lambda, \rhd A}$$

$$(\Rightarrow^{\rhd r}_{\mathbf{T}})\ \frac{A^{\overline{r}}, \Pi \Rightarrow \Lambda, A^{r}}{\Pi, \rhd(\Pi\Lambda) \Rightarrow \Lambda, \rhd A}$$

$$(\Rightarrow^{\rhd r}_{\mathbf{S4}})\ \frac{A^{\overline{r}}, \Pi, \rhd(\Pi\Lambda) \Rightarrow \Lambda, A^{r}}{\Pi, \rhd(\Pi\Lambda) \Rightarrow \Lambda, \rhd A}$$

$$(\Rightarrow^{\rhd r}_{\mathbf{B}})\ \frac{\{A^{\overline{r}}, \Pi, \Phi' \Rightarrow \Phi, \rhd(\Psi'\Psi), \Lambda, A^{r}\}^{\Sigma=\Phi\Psi}_{\Sigma'=\Phi'\Psi'}}{\Pi, \rhd(\Pi\Lambda), \Sigma' \Rightarrow \Sigma, \Lambda, \rhd A}$$

$$(\Rightarrow^{\rhd r}_{\mathbf{S5}})\ \frac{A^{\overline{r}}, \Pi, \rhd(\Pi\Lambda) \Rightarrow \Lambda, \rhd\Sigma, A^{r}}{\Pi, \rhd(\Pi\Lambda) \Rightarrow \Lambda, \rhd\Sigma, \rhd A}$$

$$(\Rightarrow^{\rhd 0}_{\mathbf{Grz}})\ \frac{A, \rhd(A \vee \rhd A), \Pi, \rhd(\Pi\Lambda) \Rightarrow \Lambda}{\Pi, \rhd(\Pi\Lambda) \Rightarrow \Lambda, \rhd A}$$

$$(\Rightarrow^{\rhd 1}_{\mathbf{Grz}})\ \frac{\rhd(A \to \rhd A), \Pi, \rhd(\Pi\Lambda) \Rightarrow \Lambda, A}{\Pi, \rhd(\Pi\Lambda) \Rightarrow \Lambda, \rhd A}$$

Рис. 4.3. Правила исчислений $[L^{\rhd}_{2}]$.

Логика $\mathbf{B}^{\rhd}$ замкнута относительно этих правил, что следует из корректности правила $(\Rightarrow^{\rhd}_{\mathbf{B}})$, доказываемой ниже в теореме 4.3.1 о полноте. При этом исходные правила $(\Rightarrow^{\rhd r}_{\mathbf{B}})$ становятся производным в исчислении с правилами $(\Rightarrow^{\rhd r}_{\mathbf{B}\star})$: если к посылкам правила $(\Rightarrow^{\rhd r}_{\mathbf{B}})$ многократно применить правила введения $\to$ в антецедент и введения & в сукцедент, то получится посылка правила $(\Rightarrow^{\rhd r}_{\mathbf{B}\star})$.

Однако мы предпочли аксиоматику с правилами $(\Rightarrow^{\rhd r}_{\mathbf{B}})$, $r \in \{0, 1\}$, поскольку, с одной стороны, их достаточно для полной секвенциальной аксиоматизации логики разрешимости над $\mathbf{B}$, а с другой, для них правдоподобна (но пока не доказана) гипотеза о возможности ограничиться такими применениями этих правил, в которых выполняется включение $\Sigma\Sigma' \subseteq \mathrm{Sb}(\Pi\Lambda A)$ и которые в следствие этого не нарушают свойство подформульности (для правила $(\Rightarrow^{\rhd r}_{\mathbf{B}\star})$ подобная гипотеза кажется сомнительной).

Заметим, что, согласно доказываемой ниже теореме 4.5.1, во всех построенных нами исчислениях $[L_\kappa^{\triangleright}]$ сечение не устранимо. Обозначим теперь через $[L_2^{\triangleright}]^-$ исчисления, полученные из $[L_2^{\triangleright}]$ заменой правила сечения на *аналитическое* сечение (см. определение на стр. 13). Как будет следовать из теоремы 4.3.1 о полноте, исчисления $[L_2^{\triangleright}]^-$ и $[L_2^{\triangleright}]$ эквивалентны. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Лемма 4.1.3.

(а) *Исчисления* $[L_2^{\triangleright}]$, *где* $L \in \{\mathbf{T}, \mathbf{S4}, \mathbf{S5}\}$, *обладают свойством подформульности.*

(б) *Исчисление* $[\mathbf{Grz}_2^{\triangleright}]$ *обладает слабым свойством подформульности: всякая выводимая секвенция* $\Pi \Rightarrow \Sigma$ *имеет вывод, состоящий из секвенций вида* $\Gamma \Rightarrow \Delta$, *где* $\Delta \subseteq \mathrm{Sb}\,\Pi\Sigma$ *и* $\Gamma \subseteq \mathrm{Sb}(\Pi\Sigma \cup \{\triangleright(A \to \triangleright A), \triangleright(A \vee \triangleright A) \mid \triangleright A \in \mathrm{Sb}\,\Pi\Sigma\})$.

В дальнейшем нам потребуется следующая лемма.

Лемма 4.1.4.

(а) *Для* $L \in \{\mathbf{T}, \mathbf{S4}, \mathbf{B}, \mathbf{S5}, \mathbf{Grz}\}$ *исчисление* $[L_1^{\triangleright}]$ *замкнуто относительно правила* ($\mathsf{RE}^{\triangleright}$)*в следующем смысле: из* $[L_1^{\triangleright}] \vdash A \Leftrightarrow B$ *следует* $[L_1^{\triangleright}] \vdash \triangleright A \Leftrightarrow \triangleright B$.

(б) $[\mathbf{T}_2^{\triangleright}]^- \vdash \triangleright(p \to \triangleright p), p \Rightarrow \triangleright p$. **(в)** $[\mathbf{T}_2^{\triangleright}]^- \vdash \triangleright(p \vee \triangleright p) \Rightarrow p, \triangleright p$.

Доказательство. **(а)** Имеем вывод в $[\mathbf{T}_1^{\triangleright}]$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow B}{A, \triangleright A \Rightarrow \triangleright B}}{\triangleright A \Rightarrow \triangleright B, \neg A} \qquad \dfrac{\dfrac{B \Rightarrow A}{\neg A \Rightarrow \neg B}}{\neg A, \triangleright\neg A \Rightarrow \triangleright\neg B}}{\triangleright A, \triangleright\neg A \Rightarrow \triangleright B, \triangleright\neg B}$$

Применив сечения с секвенциями $\triangleright A \Rightarrow \triangleright\neg A$ (по формуле $\triangleright\neg A$) и $\triangleright\neg B \Rightarrow \triangleright B$ (по формуле $\triangleright\neg B$) и затем сокращения, получим $\triangleright A \Rightarrow \triangleright B$. Обратная секвенция доказывается аналогично.

(б) Пользуясь аналитическим сечением, выводим $[\mathbf{T}_2^{\triangleright}]^-$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \Rightarrow \triangleright p, p}{\Rightarrow (p \to \triangleright p), p}}{\triangleright(p \to \triangleright p) \Rightarrow (p \to \triangleright p), \triangleright p} \quad \dfrac{p \Rightarrow p \quad \triangleright p \Rightarrow \triangleright p}{(p \to \triangleright p), p \Rightarrow \triangleright p}}{\triangleright(p \to \triangleright p), p \Rightarrow \triangleright p, \triangleright p}}{\triangleright(p \to \triangleright p), p \Rightarrow \triangleright p}$$

(в) Аналогично пункту (б). $\dashv$

4.2. Метод замыкания

Здесь мы приведем часть доказательства теоремы 4.3.1 о полноте по Крипке секвенциальных исчислений с аналитическим сечением, общую для всех рассматриваемых нами логик L. Методом доказательства является модификация известного метода насыщения секвенций, который при наличии в исчислении аналитического сечения превращается в метод замыкания секвенций. Более точно, мы проводим рассуждения, аналогичные тем, что проводились в разделе 3.2, следя за тем, чтобы везде применения сечения ограничивались его аналитическим вариантом.

Пусть дано непротиворечивое секвенциальное исчисление $\mathcal{L}$ в $\triangleright$-языке, содержащее правила исчисления высказываний с *аналитическим* сечением. Опишем метод доказательства полноты исчисления $\mathcal{L}$ относительно какого-либо класса *конечных* шкал $\mathcal{F}$.

Определение 4.2.1. Множество $\Gamma \subseteq \mathbf{Fm}^{\triangleright}$ *замкнуто*, если $\mathrm{Sb}\,\Gamma \subseteq \Gamma$. Секвенцию $w \subseteq \Gamma$ назовем *замкнутой*, если $\mathrm{Sb}\,w \subseteq w$, т. е. всякая подформула формулы из w содержится либо в антецеденте, либо в сукцеденте секвенции w; *тонкой*, если ее антецедент и сукцедент являются множествами, т. е. формулы в них не повторяются.

Очевидно, для всякого конечного (мульти)множества формул существует наименьшее содержащее его *конечное* замкнутое множество. Пусть Γ — непустое конечное замкнутое множество. Построим конечную шкалу $F^{\Gamma}_{\mathcal{L}} := (W^{\Gamma}_{\mathcal{L}}, \uparrow)$ и модель $M^{\Gamma}_{\mathcal{L}} := (F^{\Gamma}_{\mathcal{L}}, \models)$.

Множество $W^{\Gamma}_{\mathcal{L}} := \{w \subseteq \Gamma \mid w$ есть замкнутая тонкая секвенция, $\mathcal{L} \nvdash w\}$ является конечным.

Лемма 4.2.2 (О замыкании). *Всякую невыводимую в $\mathcal{L}$ секвенцию $\Pi \Rightarrow \Sigma$, состоящую из формул множества Γ, можно расширить до замкнутой невыводимой в $\mathcal{L}$ секвенции. Формально, если $\Pi\Sigma \subseteq \Gamma$ и $\mathcal{L} \nvdash \Pi \Rightarrow \Sigma$, то $\exists w \in W^{\Gamma}_{\mathcal{L}}\colon\ \Pi \subseteq \langle w|,\ \Sigma \subseteq |w\rangle$.*

Доказательство проводится стандартным методом замыкания: если $\mathcal{L} \nvdash \Pi \Rightarrow \Sigma$, $A \notin \Pi\Sigma$ и $A \in \mathrm{Sb}\,\Pi\Sigma$, то ввиду наличия в $\mathcal{L}$ аналитического сечения (и сокращения) имеем $\mathcal{L} \nvdash \Pi \Rightarrow \Sigma A$ или $\mathcal{L} \nvdash A\Pi \Rightarrow \Sigma$, поэтому A можно добавить в антецедент или сукцедент секвенции $\Pi \Rightarrow \Sigma$. Процесс продолжается, пока секвенция $\Pi \Rightarrow \Sigma$ не станет замкнутой. $\dashv$

Отметим, что ввиду $\Gamma \neq \varnothing$ имеем $\bot \in \Gamma$ или $p \in \Gamma$ для некоторой переменной p. Значит, Γ содержит секвенцию $\Rightarrow \bot$ или $\Rightarrow p$, очевидно, не выводимую в $\mathcal{L}$. По лемме о замыкании ее можно погрузить в некоторый "мир" $w \in W^{\Gamma}_{\mathcal{L}}$. Таким образом, $W^{\Gamma}_{\mathcal{L}} \neq \varnothing$.

Оценка переменных: для любых $w \in W^{\Gamma}_{\mathcal{L}}$ и $p \in \mathrm{Var}$ положим $w \models p \leftrightharpoons p \in \langle w|$.

Осталось задать отношение $\uparrow$. Сформулируем условие на $\uparrow$, выполнения которого достаточно для наших целей.

$$\langle 1^{\triangleright}\rangle \qquad \forall w \in W^{\Gamma}_{\mathcal{L}}\ \forall A \in w. \qquad w \models A \Leftrightarrow A \in \langle w|.$$

Лемма 4.2.3. *Если $\langle 1^{\triangleright}\rangle$, то для любых $\Pi\Sigma \subseteq \Gamma$ из $\mathcal{L} \nvdash \Pi \Rightarrow \Sigma$ следует $M^{\Gamma}_{\mathcal{L}} \not\models \Pi \Rightarrow \Sigma$.*

Доказательство. Аналогично лемме 3.2.3. $\dashv$

Далее, следуя доказательству из раздела 3.2, вводим условие $\langle 2^{\triangleright}\rangle$ на отношение $\uparrow$ (квадратная скобка означает, как и раньше, дизъюнкцию условий). Заметим, что в отличие от ситуации, имевшей место в упомянутом доказательстве, здесь в формулировке условий $\langle 1^{\triangleright}\rangle$ и $\langle 2^{\triangleright}\rangle$ мы ограничиваем кванторы по формулам не множеством Γ, а лишь множеством формул, содержащихся в секвенции.

$$\langle 2^{\triangleright}\rangle \qquad \forall w \in W_{\mathcal{L}}^{\Gamma}\ \forall \triangleright B \in w. \qquad \triangleright B \in \langle w| \ \Leftrightarrow \ \left[\begin{array}{ll} \forall x{\downarrow}w & B \in \langle x|, \\ \forall x{\downarrow}w & B \in |x\rangle. \end{array}\right.$$

Лемма 4.2.4. $\langle 2^{\triangleright}\rangle \Rightarrow \langle 1^{\triangleright}\rangle$.

Доказательство проведем одновременно для всех $w \in W_{\mathcal{L}}^{\Gamma}$ индукцией по построению формулы A. При $A \equiv \bot$ левая и правая части $\langle 1^{\triangleright}\rangle$ ложны. Для $A \equiv p$ утверждение следует из определения $\models$.

Пусть $A \equiv (B \to C)$. Так как секвенция w $\widehat{\Gamma}$-полная, то $B, C \in w$, и по предположению индукции:

$$\begin{array}{ll} \textbf{(b)} & w \models B \Leftrightarrow B \in \langle w|; \quad w \not\models B \Leftrightarrow B \in |w\rangle; \\ \textbf{(c)} & w \models C \Leftrightarrow C \in \langle w|; \quad w \not\models C \Leftrightarrow C \in |w\rangle. \end{array}$$

Отсюда:

$$w \models (B \to C) \overset{\mathrm{def}\models}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{l} w \not\models B \\ w \models C \end{array}\right. \overset{(\mathbf{b},\mathbf{c})}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{l} B \in |w\rangle \\ C \in \langle w| \end{array}\right. \overset{(?)}{\Longleftrightarrow} (B \to C) \in \langle w|.$$

Докажем эквивалентность, помеченную (?).

($\Rightarrow$) Если $(B \to C) \in |w\rangle$, то $B \notin |w\rangle$ и $C \notin \langle w|$, поскольку секвенции $\Rightarrow B, (B \to C)$ и $C \Rightarrow (B \to C)$ доказуемы в $\mathcal{L}$.

($\Leftarrow$) Если $(B \to C) \in \langle w|$, то невозможно одновременно $B \in \langle w|$ и $C \in |w\rangle$, ибо секвенция $(B \to C), B \Rightarrow C$ доказуема в $\mathcal{L}$.

Наконец, пусть $A \equiv \triangleright B$. По предположению индукции для любого $x \in W_{\mathcal{L}}^{\Gamma}$ если $B \in x$, то

$$\textbf{(x)} \qquad x \models B \Leftrightarrow B \in \langle x|; \qquad x \not\models B \Leftrightarrow B \in |x\rangle.$$

Отсюда:

$$\rhd B \in \langle w| \overset{\langle 2^{\rhd}\rangle}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{ll} \forall x{\downarrow}w & B \in \langle x| \\ \forall x{\downarrow}w & B \in |x\rangle \end{array}\right. \overset{(\mathbf{x})}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{ll} \forall x{\downarrow}w & x \models B \\ \forall x{\downarrow}w & x \not\models B \end{array}\right. \overset{\mathrm{def}\models}{\Longrightarrow} w \models \rhd B,$$

$$\rhd B \in |w\rangle \overset{\langle 2^{\rhd}\rangle}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{ll} \exists x{\downarrow}w & B \in \langle x| \\ \exists y{\downarrow}w & B \in |y\rangle \end{array}\right. \overset{(\mathbf{x})}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{ll} \exists x{\downarrow}w & x \models B \\ \exists y{\downarrow}w & y \not\models B \end{array}\right. \overset{\mathrm{def}\models}{\Longrightarrow} w \not\models \rhd B. \quad \dashv$$

Теперь полноту логики $\mathcal{L}$ относительно класса конечных шкал $\mathcal{F}$ можно доказывать следующим образом. Пусть $\mathcal{L} \not\vdash \Pi \Rightarrow \Sigma$. Строим конечное замкнутое множество $\Gamma \supseteq \Pi\Sigma$ и отношение $\uparrow$ так, что $F^{\Gamma}_{\mathcal{L}} \in \mathcal{F}$ и выполнено условие $\langle 2^{\rhd}\rangle$. Из него по лемме 4.2.4 вытекает $\langle 1^{\rhd}\rangle$, и в силу леммы 4.2.3 получаем $F^{\Gamma}_{\mathcal{L}} \not\models \Pi \Rightarrow \Sigma$, что и требовалось.

4.3. Полнота аксиоматик

Доказываемая в этом разделе теорема утверждает, что построенные выше гильбертовские и секвенциальные исчисления дают полную аксиоматизацию логик разрешимости над **T**, **S4**, **B**, **S5** и **Grz**.

Теорема 4.3.1 (Совместная теорема о полноте).

Для каждой логики $L \in \{\mathbf{T}, \mathbf{S4}, \mathbf{B}, \mathbf{S5}, \mathbf{Grz}\}$ *и любой секвенции* $\Pi \Rightarrow \Sigma$ *в* $\rhd$*-языке эквивалентны следующие утверждения:*

(1) $[L_2^{\rhd}]^- \vdash \Pi \Rightarrow \Sigma$,

(2) $[L_1^{\rhd}] \vdash \Pi \Rightarrow \Sigma$,

(3) $L^{\rhd} \vdash \bigwedge\Pi \to \bigvee\Sigma$,

(4) $L \vdash \mathsf{tr}(\bigwedge\Pi \to \bigvee\Sigma)$,

(5) $F \models \Pi \Rightarrow \Sigma$ *для любой конечной* L*-шкалы* F.

Доказательство проведем по схеме $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Leftrightarrow (5) \Rightarrow (1)$. Импликация $(2) \Rightarrow (3)$ доказывается индукцией по построению вывода в $[L_1^{\rhd}]$; при этом шаги, отвечающие правилам $(\overset{\rhd}{\neg}\Rightarrow)$ и $(\Rightarrow\overset{\rhd}{\neg})$, очевидны ввиду наличия в логиках $L^{\rhd}$ аксиомы $(\mathsf{A}^{\rhd}_{\neg})$; поэтому необходимо лишь проверять шаги, отвечающие правилу $(\Rightarrow^{\triangleright}_{L})$. Импликацию (3) $\Rightarrow$ (4) достаточно доказывать лишь для $\Pi = \varnothing$ и $\Sigma = \{A\}$, т. е. проверять выводимость tr-переводов аксиом $L^{\triangleright}$ в L; для аксиомы $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\neg})$ эта проверка очевидна. Далее, эквивалентность (4) $\Leftrightarrow$ (5) следует из известных [11] теорем о полноте по Крипке логик L и очевидного факта: $F \models A \;\Leftrightarrow\; F \models \mathsf{tr}(A)$ для любой $\triangleright$-формулы A. Наконец, при доказательстве импликации (5) $\Rightarrow$ (1) мы обозначаем исчисление $\mathcal{L} := [L^{\triangleright}_{2}]^{-}$.

(1) $\Rightarrow$ (2) Достаточно показать, что правила $(\Rightarrow^{\triangleright r}_{L})$ являются производными в $[L^{\triangleright}_{1}]$. Выведем, например, заключение правила $(\Rightarrow^{\triangleright 0}_{\mathbf{T}})$ из его посылки в исчислении $[\mathbf{T}^{\triangleright}_{1}]$:

$$\dfrac{\dfrac{A, \Pi \Rightarrow \Lambda}{\Pi, \neg\Lambda \Rightarrow \neg A}}{\Pi, \neg\Lambda, \triangleright\Pi, \triangleright\neg\Lambda \Rightarrow \triangleright\neg A}$$

Применив сечение с секвенцией $\triangleright\neg A \Rightarrow \triangleright A$ (по $\triangleright\neg A$), с секвенцией $\Rightarrow C, \neg C$ (по $\neg C$) и с секвенцией $\triangleright C \Rightarrow \triangleright\neg C$ (по $\triangleright\neg C$) для всех $C \in \Lambda$, мы получим $\Pi, \triangleright(\Pi\Lambda) \Rightarrow \Lambda, \triangleright A$.

При рассмотрении правила $(\Rightarrow^{\triangleright 0}_{\mathbf{Grz}})$ потребуется выводимость в $[\mathbf{Grz}^{\triangleright}_{1}]$ секвенции $\triangleright(\neg A \to \triangleright\neg A) \Rightarrow \triangleright(A \vee \triangleright A)$, вытекающая из леммы 4.1.4 (а).

Логика T.

(2) $\Rightarrow$ (3) По лемме 4.1.1 (б), $\mathbf{T}^{\triangleright} \vdash \bigwedge\triangleright\Pi \to \triangleright\bigwedge\Pi$, поэтому выводим в $\mathbf{T}^{\triangleright}$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\bigwedge\Pi \to B}{\triangleright(\bigwedge\Pi \to B)}}{\bigwedge\Pi \to [\triangleright\bigwedge\Pi \to \triangleright B]}}{\bigwedge\{\Pi, \triangleright\Pi\} \to \triangleright B}$$

(3) $\Rightarrow$ (4) Выведем tr-перевод аксиомы $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{T}})$ в логике $\mathbf{T}$:

$$\mathbf{T} \vdash p \mathbin{\&} \triangleright p \mathbin{\&} \triangleright(p \to q) \longrightarrow \Box p \mathbin{\&} [\Box(p \to q) \vee \Box(p \mathbin{\&} \neg q)] \longrightarrow$$
$$\longrightarrow [\Box q \vee \Box p \mathbin{\&} \Box\neg q] \longrightarrow [\Box q \vee \Box\neg q] \longleftrightarrow \triangleright q.$$

(5) $\Rightarrow$ (1) Допустим $\mathcal{L} \nvdash \Pi \Rightarrow \Sigma$. Возьмем конечное замкнутое множество $\Gamma := \mathrm{Sb}\,\Pi\Sigma$. На $W^{\Gamma}_{\mathcal{L}}$ введем рефлексивное отношение (фигурная скобка означает конъюнкцию условий):

$$\langle 3^{\triangleright}_{\mathbf{T}} \rangle \qquad w{\uparrow}x \ \leftrightharpoons\ \forall C \in \mathbf{Fm}^{\triangleright}. \quad \triangleright C \in \langle w| \Rightarrow \begin{cases} C \in \langle w| \Rightarrow C \in \langle x|, \\ C \in |w\rangle \Rightarrow C \in |x\rangle. \end{cases}$$

Тогда $F^{\Gamma}_{\mathcal{L}}$ — конечная $\mathbf{T}$-шкала, и остается проверить условие $\langle 2^{\triangleright} \rangle$.

Лемма 4.3.2. $\langle 3^{\triangleright}_{\mathbf{T}} \rangle \Rightarrow \langle 2^{\triangleright} \rangle$.

▶ Допустим $\langle 3^{\triangleright}_{\mathbf{T}} \rangle$ и докажем имеющуюся в $\langle 2^{\triangleright} \rangle$ эквивалентность.

($\Rightarrow$) Берем любые $w \in W^{\Gamma}_{\mathcal{L}}$ и $\triangleright B \in \langle w|$. Ввиду замкнутости w возможны два случая:

1) $B \in \langle w|$. Тогда $\forall x{\downarrow}w$ по $\langle 3^{\triangleright}_{\mathbf{T}} \rangle$ получаем $B \in \langle x|$.

2) $B \in |w\rangle$. Аналогично $\forall x{\downarrow}w$ получаем $B \in |x\rangle$.

($\Leftarrow$) Пусть $w \in W^{\Gamma}_{\mathcal{L}}$, $\triangleright B \in |w\rangle$. Построим такие $x, y{\downarrow}w$, что $B \in \langle x|$, $B \in |y\rangle$.

Случай $B \in |w\rangle$**.** Выбор y очевиден: $y := w$. Положим

$$\Pi := \{C \in \langle w| \mid \triangleright C \in \langle w|\},$$
$$\Lambda := \{C \in |w\rangle \mid \triangleright C \in \langle w|\}.$$

Тогда $\mathcal{L} \nvdash B, \Pi \Rightarrow \Lambda$, ибо иначе по правилу ($\Rightarrow^{\triangleright 0}_{\mathbf{T}}$) получим $\mathcal{L} \vdash \Pi, \triangleright(\Pi\Lambda) \Rightarrow \Lambda, \triangleright B$, откуда ослаблением $\mathcal{L} \vdash w$. По лемме о замыкании $\exists x \in W^{\Gamma}_{\mathcal{L}}$: $\Pi \subseteq \langle x|$, $B \in \langle x|$, $\Lambda \subseteq |x\rangle$.

Докажем, что $w{\uparrow}x$. Пусть $\triangleright C \in \langle w|$. Если $C \in \langle w|$, то $C \in \Pi \subseteq \langle x|$; если же $C \in |w\rangle$, то $C \in \Lambda \subseteq |x\rangle$.

Случай $B \in \langle w|$**.** Положив $x := w$ и используя ($\Rightarrow^{\triangleright 1}_{\mathbf{T}}$), аналогично строим искомый y (для остальных логик мы будем обычно рассматривать только первый случай). ◀

Логика S4.

(2) $\Rightarrow$ (3) Вывод в $\mathbf{S4}^{\triangleright}$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\bigwedge\{\Pi, \triangleright\Pi\} \to B}{\bigwedge\{\Pi, \triangleright\Pi\} \to [\triangleright\bigwedge\{\Pi, \triangleright\Pi\} \to \triangleright B]}}{\bigwedge\{\Pi, \triangleright\Pi, \triangleright\triangleright\Pi\} \to \triangleright B}}{\bigwedge\{\Pi, \triangleright\Pi\} \to \triangleright B}$$

(3) $\Rightarrow$ (4) Выведем tr-перевод аксиомы $(\mathsf{A}_4^{\triangleright})$ в логике $\mathbf{S4}$ (даже в $\mathbf{K4}$).

$$\mathbf{K4} \vdash \triangleright p \leftrightarrow (\Box p \vee \Box\neg p) \to (\Box\Box p \vee \Box\Box\neg p) \to \Box(\Box p \vee \Box\neg p) \leftrightarrow \Box\triangleright p \to \triangleright\triangleright p.$$

(5) $\Rightarrow$ (1) На $W_{\mathcal{L}}^{\Gamma}$ введем рефлексивное транзитивное отношение:

$$\langle 3_{\mathbf{S4}}^{\triangleright}\rangle \;\; w{\uparrow}x \;\; \leftrightharpoons \;\; \forall C \in \mathbf{Fm}^{\triangleright}. \quad \triangleright C \in \langle w| \Rightarrow \triangleright C \in \langle x| \,\&\, \begin{cases} C \in \langle w| \Rightarrow C \in \langle x|, \\ C \in |w\rangle \Rightarrow C \in |x\rangle. \end{cases}$$

В доказательстве леммы $\mathcal{L} \nvdash B, \Pi, \triangleright(\Pi\Lambda) \Rightarrow \Lambda$, иначе по правилу $(\Rightarrow_{\mathbf{S4}}^{\triangleright 0})$ получим $\mathcal{L} \vdash w$. Для такого $x \in W_{\mathcal{L}}^{\Gamma}$, что $\Pi, \triangleright(\Pi\Lambda) \subseteq \langle x|$ и $\Lambda \subseteq |x\rangle$ очевидно, что $w{\uparrow}x$.

Логика B.

(2) $\Rightarrow$ (3) Обозначая $\Omega := \neg\Sigma$ и используя выводимые в $\mathbf{B}^{\triangleright}$ формулы $p \to (\triangleright p \to p)$ и $p \to \triangleright(\triangleright p \to p)$, строим вывод в $\mathbf{B}^{\triangleright}$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\bigwedge\Pi \to \bigvee\{(\triangleright\Sigma \,\&\, \Sigma), B\}}{\bigwedge\{\Pi, (\triangleright\Omega \to \Omega)\} \to B}}{\bigwedge\{\Pi, \triangleright\Pi, (\triangleright\Omega \to \Omega), \triangleright(\triangleright\Omega \to \Omega)\} \to \triangleright B}}{\bigwedge\{\Pi, \triangleright\Pi, \Omega\} \to \triangleright B}}{\bigwedge\{\Pi, \triangleright\Pi\} \to \bigvee\{\Sigma, \triangleright B\}}$$

(3) $\Rightarrow$ (4) Выведем tr-перевод аксиомы $(\mathsf{A}_{\mathbf{B}}^{\triangleright})$ в логике $\mathbf{B}$.

$$\mathbf{B} \vdash p \longrightarrow \Box\Diamond p \longleftrightarrow \Box[\Diamond p \,\&\, (\neg p \to \Diamond\neg p)] \longleftrightarrow$$
$$\longleftrightarrow \Box[p \vee (\Diamond p \,\&\, \Diamond\neg p)] \longleftrightarrow \Box(p \vee \neg\triangleright p) \longrightarrow \triangleright(p \vee \neg\triangleright p).$$

(5) $\Rightarrow$ (1) На $W^{\Gamma}_{\mathcal{L}}$ сначала введем рефлексивное отношение $\uparrow$ условием $\langle 3^{\triangleright}_{\mathbf{T}}\rangle$, а затем возьмем его симметризацию:

$\langle 3^{\triangleright}_{\mathbf{B}}\rangle$ $$w{\Uparrow}x \;\leftrightharpoons\; (w{\uparrow}x)\,\&\,(x{\uparrow}w).$$

Для доказательства леммы берем Π и Λ как выше, а также

$$\Sigma := \{C \in |w\rangle \mid \triangleright C \in |w\rangle\},$$
$$\Sigma' := \{C \in \langle w| \mid \triangleright C \in |w\rangle\}.$$

Существует такое разбиение $\Sigma = \Phi\Psi$, $\Sigma' = \Phi'\Psi'$, что $\mathcal{L} \nvdash B, \Pi, \Phi' \Rightarrow \Phi, \triangleright(\Psi'\Psi), \Lambda$, иначе исходя из всевозможных секвенций такого вида по правилу $(\Rightarrow^{\triangleright 0}_{\mathbf{B}})$ мы бы вывели[1] секвенцию $\Pi, \triangleright(\Pi\Lambda), \Sigma' \Rightarrow \Sigma, \Lambda, \triangleright B$ и далее ослаблением $\mathcal{L} \vdash w$.

Осталось для такого $x \in W^{\Gamma}_{\mathcal{L}}$, что $\Pi\Phi' \subseteq \langle x|$ и $\Phi, \triangleright(\Psi'\Psi), \Lambda \subseteq |x\rangle$, проверить $w{\Uparrow}x$. Заметим, что $x \subseteq w$.

Условие $w{\uparrow}x$ проверяется как в случае логики $\mathbf{T}$. Докажем $x{\uparrow}w$.

Пусть $\triangleright C \in \langle x|$. Тогда $\triangleright C \in w$ ввиду $x \subseteq w$, и $C \in w$ в силу замкнутости w.

Далее, пусть $C \in \langle x|$. Если бы $C \in |w\rangle$, то возможны случаи:

1) $\triangleright C \in \langle w|$, тогда $C \in \Lambda \subseteq |x\rangle$, что не так;

2) $\triangleright C \in |w\rangle$, тогда $C \in \Sigma = \Phi\Psi$ и мы имеем: если $C \in \Phi$, то $C \in |x\rangle$, что неверно; если же $C \in \Psi$, то $\triangleright C \in \triangleright\Psi \subseteq |x\rangle$, что тоже неверно.

Теперь пусть $C \in |x\rangle$. Если бы $C \in \langle w|$, то возможны случаи:

1) $\triangleright C \in \langle w|$, тогда $C \in \Pi \subseteq \langle x|$, что не так;

2) $\triangleright C \in |w\rangle$, тогда $C \in \Sigma' = \Phi'\Psi'$ и мы имеем: если $C \in \Phi'$, то $C \in \langle x|$, что неверно; если же $C \in \Psi'$, то $\triangleright C \in \triangleright\Psi' \subseteq |x\rangle$, что тоже неверно.

[1] Если в данном применении правила $(\Rightarrow^{\triangleright 0}_{\mathbf{B}})$ мы могли бы ограничиться условием $\Sigma\Sigma' \subseteq \mathrm{Sb}(\Pi\Lambda B)$, то попутно было бы установлено свойство подформульности для исчисления $[\mathbf{B}^{\triangleright}_{2}]$.

Логика S5.

(2) $\Rightarrow$ (3) Пользуясь аксиомой $(\mathsf{A}^{\rhd}_{5\flat})$, строим вывод в $\mathbf{S5}^{\rhd}$:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\bigwedge\{\Pi, \rhd\Pi, \neg\rhd\Sigma\} \to B}{\bigwedge\{\Pi, \rhd\Pi, \neg\rhd\Sigma\} \to [\rhd\bigwedge\{\Pi, \rhd\Pi, \neg\rhd\Sigma\} \to \rhd B]}}{\bigwedge\{\Pi, \rhd\Pi, \neg\rhd\Sigma, \rhd\rhd\Pi, \rhd\neg\rhd\Sigma\} \to \rhd B}}{\bigwedge\{\Pi, \rhd\Pi, \neg\rhd\Sigma\} \to \rhd B}$$

(3) $\Rightarrow$ (4) Выводимость $\mathsf{tr}(\mathsf{A}^{\rhd}_{5})$ в $\mathbf{S5}$ (даже в $\mathbf{K45}$) вытекает из доказанной выше выводимости $\mathbf{K4} \vdash \rhd p \to \rhd\rhd p$ и

$$\begin{aligned}\mathbf{K45} \vdash \neg\rhd p \longleftrightarrow (\Diamond p \wedge \Diamond\neg p) \longrightarrow (\Box\Diamond\Diamond p \wedge \Box\Diamond\Diamond\neg p) \longrightarrow \\ \longrightarrow (\Box\Diamond p \wedge \Box\Diamond\neg p) \longrightarrow \Box(\Diamond p \wedge \Diamond\neg p) \longleftrightarrow \Box\neg\rhd p \longrightarrow \rhd\rhd p.\end{aligned}$$

(5) $\Rightarrow$ (1) На $W^{\Gamma}_{\mathcal{L}}$ сначала введем рефлексивное транзитивное отношение $\uparrow$ условием $\langle 3^{\rhd}_{\mathbf{S4}}\rangle$, а затем возьмем его симметризацию:

$$\langle 3^{\rhd}_{\mathbf{S5}}\rangle \qquad w{\Uparrow}x \ \leftrightharpoons\ (w{\uparrow}x) \mathbin{\&} (x{\uparrow}w).$$

Для доказательства леммы возьмем Π и Λ как выше, а также $\Sigma := \{C \mid \rhd C \in |w\rangle\}$.

Если бы $\mathcal{L} \vdash B, \Pi, \rhd(\Pi\Lambda) \Rightarrow \Lambda, \rhd\Sigma$, то по правилу $(\Rightarrow^{\rhd 0}_{\mathbf{S5}})$ мы бы вывели $\mathcal{L} \vdash w$.

Осталось для такого $x \in W^{\Gamma}_{\mathcal{L}}$, что $\Pi, \rhd(\Pi\Lambda) \subseteq \langle x|$ и $\Lambda, \rhd\Sigma \subseteq |x\rangle$, проверить $w{\Uparrow}x$. Заметим, что $x \subseteq w$.

Докажем, что $w{\uparrow}x$. Если $\rhd C \in \langle w|$, то $C \in \Pi\Lambda$ и $\rhd C \in \langle x|$. Далее если $C \in \langle w|$, то $C \in \Pi \subseteq \langle x|$. Если же $C \in |w\rangle$, то $C \in \Lambda \subseteq |x\rangle$.

Докажем, что $x{\uparrow}w$. Пусть $\rhd C \in \langle x|$. Тогда $\rhd C \in w$ ввиду $x \subseteq w$, и если бы $\rhd C \in |w\rangle$, то $C \in \Sigma$ и $\rhd C \in |x\rangle$, что не так; значит, $\rhd C \in \langle w|$. Далее, если $C \in \langle x|$, то $C \in w$, и если бы $C \in |w\rangle$, то ввиду доказанного включения $\rhd C \in \langle w|$ имеем $C \in \Lambda \subseteq |x\rangle$, что не так; поэтому $C \in \langle w|$. Если же $C \in |x\rangle$, то $C \in w$, и если бы $C \in \langle w|$, то ввиду $\rhd C \in \langle w|$ имеем $C \in \Pi \subseteq \langle x|$, что неверно; поэтому $C \in |w\rangle$.

Логика Grz.

(2) $\Rightarrow$ (3) Выводим в $\mathbf{Grz}^{\triangleright}$, используя аксиому $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{4}\flat})$ на последнем шаге.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\bigwedge\{\Pi, \triangleright\Pi\} \to (\triangleright(B \to \triangleright B) \to B)}{\bigwedge\{\Pi, \triangleright\Pi\} \to [\triangleright\bigwedge\{\Pi, \triangleright\Pi\} \to \triangleright(\triangleright(B \to \triangleright B) \to B)]}}{\bigwedge\{\Pi, \triangleright\Pi, \triangleright\triangleright\Pi\} \to \triangleright B}}{\bigwedge\{\Pi, \triangleright\Pi\} \to \triangleright B}$$

(3) $\Rightarrow$ (4) Докажем: $\mathbf{Grz} \vdash \mathsf{tr}(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{G}})$. С одной стороны: $\mathbf{Grz} \vdash \Box p \to p$, и потому

$\mathbf{Grz} \vdash (p \to \triangleright p) \longleftrightarrow (p \to \Box p)$. Отсюда:

$\mathbf{Grz} \vdash \Box\neg(p \to \triangleright p) \longleftrightarrow \Box\neg(p \to \Box p) \longleftrightarrow [\Box p \mathbin{\&} \Box\neg\Box p] \longleftrightarrow \neg[\Box p \to \Diamond\Box p] \longleftrightarrow \bot$.

Тогда выводим в $\mathbf{Grz}$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Box[\Box(p \to \Box p) \to p] \to p}{\Box[\Box(p \to \triangleright p) \vee \bot \to p] \to p}}{\Box[\Box(p \to \triangleright p) \vee \Box\neg(p \to \triangleright p) \to p] \to p}}{\Box[\triangleright(p \to \triangleright p) \to p] \to p}}{\Box[\triangleright(p \to \triangleright p) \to p] \to \Box p}$$

С другой стороны:

$\mathbf{Grz} \vdash \Box\neg[\triangleright(p \to \triangleright p) \to p] \longleftrightarrow [\Box\triangleright(p \to \triangleright p) \mathbin{\&} \Box\neg p] \longrightarrow \Box\neg p \longrightarrow \triangleright p.$

(5) $\Rightarrow$ (1) Несколько модифицируем метод доказательства, описанный в разделе 4.2. Допустим $\mathcal{L} \nvdash \Pi \Rightarrow \Sigma$. Возьмем $\Gamma := \mathrm{Sb}\,\Pi\Sigma$,

$$\widehat{\Gamma} := \Gamma \cup \mathrm{Sb}\{\triangleright(A \to \triangleright A), \triangleright(A \vee \triangleright A) \mid \triangleright A \in \Gamma\}.$$

Множество $W^{\Gamma}_{\mathcal{L}} := \{w \mid w$ есть замкнутая тонкая секвенция, $\langle w| \subseteq \widehat{\Gamma}$, $|w\rangle \subseteq \Gamma$, $\mathcal{L} \nvdash w\}$ конечно.

Лемма 4.3.3 (О замыкании). *Всякую невыводимую в $\mathcal{L}$ секвенцию $\Pi \Rightarrow \Sigma$, такую, что $\Pi \subseteq \widehat{\Gamma}$ и $\Sigma \subseteq \Gamma$, можно расширить до секвенции* *из* $W^{\Gamma}_{\mathcal{L}}$*. Формально, если* $\mathcal{L} \nvdash \Pi \Rightarrow \Sigma$*, причем* $\Pi \subseteq \widehat{\Gamma}$ *и* $\Sigma \subseteq \Gamma$*, то* $\exists w \in W^{\Gamma}_{\mathcal{L}}$: $\Pi \subseteq \langle w|$, $\Sigma \subseteq |w\rangle$.

▶ В дополнение к доказательству леммы 4.2.2 надо проверить, что если в процессе замыкания секвенция $\Pi' \Rightarrow \Sigma'$, невыводимая в $\mathcal{L}$, получена из $\Pi \Rightarrow \Sigma$ добавлением формулы $A \in \mathrm{Sb}\,\Pi\Sigma$, $A \notin \Pi\Sigma$, в антецедент или сукцедент, то $\Pi' \subseteq \widehat{\Gamma}$ и $\Sigma' \subseteq \Gamma$. Первое включение очевидно. При $A \in \Gamma$ второе тоже очевидно. Если же $A \in (\widehat{\Gamma} \setminus \Gamma)$, то ввиду $A \notin \Pi\Sigma$ формула A есть либо $(B \vee \rhd B)$, либо $(B \to \rhd B)$ для некоторой $\rhd B \in \Pi\Sigma$, причем $\rhd A \in \Pi$. В обоих случаях $\mathcal{L} \vdash \rhd A \Rightarrow A$, что следует из леммы 4.1.4 (б,в), и значит, $\mathcal{L} \vdash \Pi \Rightarrow \Sigma A$. Поэтому формула A не могла быть добавлена в сукцедент секвенции $\Pi \Rightarrow \Sigma$, и следовательно, $\Sigma' = \Sigma \subseteq \Gamma$. ◀

Как и ранее, для любых $w \in W^{\Gamma}_{\mathcal{L}}$ и $p \in \mathrm{Var}$ положим $w \models p \leftrightharpoons p \in \langle w|$. Формулировка и доказательство лемм 4.2.3 и 4.2.4 переносятся на этот случай без существенных изменений. На $W^{\Gamma}_{\mathcal{L}}$ введем сначала транзитивное отношение $\uparrow$ условием $\langle 3^{\rhd}_{\mathbf{S4}}\rangle$, далее иррефлексивное транзитивное отношение:

$$\langle 3^{\rhd}_{\mathbf{Grz}}\rangle \qquad w \prec x \;\leftrightharpoons\; (w{\uparrow}x)\;\&\;(\exists C \in \mathbf{Fm}^{\rhd}.\quad \rhd C \notin \langle w|\;\&\;\rhd C \in \langle x|),$$

и, наконец, рефлексивное транзитивное антисимметричное отношение, т. е. частичный порядок $w \preccurlyeq x \leftrightharpoons (w \prec x) \vee (w = x)$. Построена конечная **Grz**-шкала $F^{\Gamma}_{\mathcal{L}} := (W^{\Gamma}_{\mathcal{L}}, \preccurlyeq)$. Осталось проверить условие $\langle 2^{\rhd}\rangle$, имеющее теперь вид:

$$\langle 2^{\rhd}\rangle \qquad \forall w \in W^{\Gamma}_{\mathcal{L}}\ \forall \rhd B \in w. \qquad \rhd B \in \langle w| \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{ll} \forall x \succcurlyeq w & B \in \langle x|, \\ \forall x \succcurlyeq w & B \in |x\rangle. \end{array}\right.$$

Лемма 4.3.3.1. $\langle 3^{\rhd}_{\mathbf{Grz}}\rangle \Rightarrow \langle 2^{\rhd}\rangle$.

▶ Допустим $\langle 3^{\rhd}_{\mathbf{Grz}}\rangle$ и докажем эквивалентность в $\langle 2^{\rhd}\rangle$.

($\Rightarrow$) Возьмем любые $w \in W^{\Gamma}_{\mathcal{L}}$ и $\rhd B \in w$. Пусть $\rhd B \in \langle w|$. Возможны два случая:

1) $B \in \langle w|$, тогда $\forall x \succcurlyeq w$ либо $w \prec x$, $w{\uparrow}x$ и $B \in \langle x|$ по $\langle 3^{\rhd}_{\mathbf{S4}}\rangle$, либо $x = w$ и $B \in \langle w| = \langle x|$.

2) $B \in |w\rangle$. Аналогично $\forall x \succcurlyeq w$ получаем $B \in |x\rangle$.

($\Leftarrow$) Берем $w \in W^{\Gamma}_{\mathcal{L}}$, $\rhd B \in |w\rangle$. Возьмем Π, Λ как в доказательстве леммы 4.3.2.

Случай $B \in |w\rangle$**.** Положим $y := w$. Далее имеем:

$$\mathcal{L} \nvdash B, \rhd(B \vee \rhd B), \Pi, \rhd(\Pi\Lambda) \Rightarrow \Lambda,$$

иначе по правилу $(\Rightarrow^{\rhd 0}_{\mathbf{Grz}})$ и правилам ослабления получим $\mathcal{L} \vdash w$. Поскольку $\rhd B \in |w\rangle \subseteq \Gamma$, антецедент выписанной секвенции содержится в $\widehat{\Gamma}$, а сукцедент в Γ. По лемме о замыкании эту секвенцию можно погрузить в некоторую секвенцию $x \in W^{\Gamma}_{\mathcal{L}}$.

Остается проверить $w \prec x$. Условие $w{\uparrow}x$ проверяется как в случае логики **S4**.

Далее $\rhd(B \vee \rhd B) \in \langle x|$. Но $\rhd(B \vee \rhd B) \notin \langle w|$, иначе, учитывая, что $B, \rhd B \in |w\rangle$, мы в силу леммы 4.1.4 (в) получим даже $[\mathbf{T}^{\rhd}_2]^- \vdash w$.

Случай $B \in \langle w|$**.** Теперь $x := w$, и аналогично имеем:

$$\mathcal{L} \nvdash \rhd(B \to \rhd B), \Pi, \rhd(\Pi\Lambda) \Rightarrow \Lambda, B.$$

Как и выше, погружаем эту секвенцию в некоторый $y \in W^{\Gamma}_{\mathcal{L}}$. Очевидно, $w{\uparrow}y$. Наконец, $w \prec y$, поскольку $\rhd(B \to \rhd B) \in \langle y|$, но $\rhd(B \to \rhd B) \notin \langle w|$ ввиду леммы 4.1.4 (б). ◀

Теорема полностью доказана. ⊣

4.4. Полнота посредством обратного перевода

Семантический метод доказательства полноты аксиоматик логик разрешимости, описанный в разделе 4.2 и использованный в разделе 4.3, устанавливает, помимо собственно полноты построенных аксиоматик, (слабое) свойство подформульности для секвенциальных исчислений $[L^{\rhd}_2]$ (лемма 4.1.3). Если же ставить лишь задачу построения полных гильбертовских аксиоматик для *рефлексивных* логик разрешимости, то ее можно решить уже на синтаксическом уровне. Этот метод мы опишем в этом разделе и применим для аксиоматизации логики разрешимости над **S4.1**.

Как известно, в присутствии рефлексивности оператор $\Box$ выражается через $\rhd$ посредством равенства $\Box p = p \,\&\, \rhd p$. Исходя из этого, введем перевод $\mathsf{Tr}\colon \mathbf{Fm}^{\Box} \to \mathbf{Fm}^{\rhd}$, сохраняющий переменные и булевы связки, а на формулах вида $\Box A$ действующий следующим образом:

$$\mathsf{Tr}(\Box A) = \mathsf{Tr}(A) \,\&\, \rhd \mathsf{Tr}(A).$$

Далее, для произвольной $\rhd$-логики M обозначим

$$M^{\boxdot} := \{A \in \mathbf{Fm}^{\Box} \mid \mathsf{Tr}(A) \in M\} = \mathsf{Tr}^{-1}(M).$$

Следующая лемма утверждает, что переводы tr и Tr “взаимно обратны”.

Лемма 4.4.1.

(а) *Пусть $\Box$-логика L содержит аксиому $(\mathsf{A}^{\Box}_{\mathbf{T}})$, $M := L^{\rhd}$, тогда $M^{\boxdot} = L$.*

(б) *Пусть $\rhd$-логика M содержит аксиому $(\mathsf{A}^{\rhd}_{\neg})$, $L := M^{\boxdot}$, тогда $L^{\rhd} = M$.*

Доказательство. **(а)** Ввиду $L \vdash \Box p \to p$ имеем:

$L \vdash \mathsf{tr}(\mathsf{Tr}(\Box p)) \longleftrightarrow \mathsf{tr}(p \,\&\, \rhd p) \longleftrightarrow [p \,\&\, (\Box p \vee \Box \neg p)] \longleftrightarrow \Box p.$

Поэтому $L \vdash A \leftrightarrow \mathsf{tr}(\mathsf{Tr}(A))$ для любой $\Box$-формулы A. Отсюда:

$M^{\boxdot} = \{A \mid \mathsf{Tr}(A) \in L^{\rhd}\} = \{A \mid \mathsf{tr}(\mathsf{Tr}(A)) \in L\} = L.$

(б) Ввиду $M \vdash \rhd p \leftrightarrow \rhd \neg p$ имеем:

$$M \vdash \mathsf{Tr}(\mathsf{tr}(\rhd p)) \longleftrightarrow \mathsf{Tr}(\Box p \vee \Box \neg p) \longleftrightarrow [(p \,\&\, \rhd p) \vee (\neg p \,\&\, \rhd \neg p)] \longleftrightarrow$$
$$\longleftrightarrow [(p \,\&\, \rhd p) \vee (\neg p \,\&\, \rhd p)] \longleftrightarrow [(p \vee \neg p) \,\&\, \rhd p] \longleftrightarrow \rhd p.$$

Поэтому $M \vdash A \leftrightarrow \mathsf{Tr}(\mathsf{tr}(A))$ для любой $\rhd$-формулы A. Отсюда:

$L^{\rhd} = \{A \mid \mathsf{tr}(A) \in M^{\boxdot}\} = \{A \mid \mathsf{Tr}(\mathsf{tr}(A)) \in M\} = M.$ ⊣

Теорема 4.4.2. *Пусть даны* $\Box$*-логика* $L \ni (\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{T}})$ *и* $\triangleright$*-логика* $M \ni (\mathsf{A}^{\triangleright}_{\neg})$. *Тогда справедлива эквивалентность:* $[M \subseteq L^{\triangleright} \mathbin{\&} L \subseteq M^{\boxdot}] \Leftrightarrow L^{\triangleright} = M$.

Доказательство. ($\Leftarrow$) Первое включение очевидно, второе следует из леммы 4.4.1 (а).

($\Rightarrow$) По лемме 4.4.1 (б) имеем: $L^{\triangleright} \subseteq \left(M^{\boxdot}\right)^{\triangleright} = M \subseteq L^{\triangleright}$. $\dashv$

Как следствие, если логика L содержит аксиомы логики $\mathbf{T}$ и имеет лишь правила (MP), (Sub) и (Nec), а логика M содержит аксиому $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\neg})$ и имеет правила (MP), (Sub) и (Dec), то для доказательства равенства $L^{\triangleright} = M$ достаточно в логике L вывести tr-переводы аксиом M (*корректность* аксиоматики), а в M вывести Tr-переводы аксиом L (*полнота* аксиоматики).

Следствие 4.4.3 (Аксиоматика $\mathbf{S4.1}^{\triangleright}$). $\mathbf{S4.1}^{\triangleright} = \mathbf{S4}^{\triangleright} + (\mathsf{A}^{\triangleright}_{1})$, *где дополнительная аксиома:*

$$(\mathsf{A}^{\triangleright}_{1}) \quad \triangleright\triangleright p \to \triangleright p \quad \text{(аксиома Мак-Кинси)}$$

Доказательство. <u>Корректность.</u> Выведем tr-перевод аксиомы $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{1})$ в $\mathbf{S4.1}$.

Ввиду того, что $\mathbf{T} \vdash \Diamond A \leftrightarrow (\triangleright A \to A)$, имеем:

$\mathbf{T} \vdash [\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p] \longleftrightarrow [\Diamond\Box\neg p \vee \Diamond\Box p] \longleftrightarrow$

$\longleftrightarrow \Diamond(\Box\neg p \vee \Box p) \longleftrightarrow \Diamond\triangleright p \longleftrightarrow [\triangleright\triangleright p \to \triangleright p]$.

<u>Полнота.</u> Выведем Tr-перевод аксиомы $(\mathsf{A}^{\Box}_{1})$ в $\mathbf{S4.1}^{\triangleright}$.

$\mathbf{S4.1}^{\triangleright} \vdash \mathsf{Tr}(\mathsf{A}^{\Box}_{1}) \longleftrightarrow [\Diamond p \mathbin{\&} \triangleright\Diamond p \to \Diamond(\triangleright p \mathbin{\&} p)] \longleftrightarrow$

$\longleftrightarrow [(\triangleright p \to p) \mathbin{\&} \triangleright(\triangleright p \to p) \longrightarrow (\triangleright(\triangleright p \mathbin{\&} p) \to \triangleright p \mathbin{\&} p)]$.

Осталось вывести формулу в квадратных скобках. Имеем:

$\mathbf{S4.1}^{\triangleright} \vdash (\triangleright p \to p) \mathbin{\&} \triangleright(\triangleright p \to p) \mathbin{\&} \triangleright(\triangleright p \mathbin{\&} p) \longleftrightarrow$

$(\triangleright p \to p) \mathbin{\&} \triangleright(\triangleright p \to p) \mathbin{\&} \triangleright(\triangleright p \to \neg p) \longrightarrow$

$(\triangleright p \to p) \mathbin{\&} \triangleright(\triangleright p \to p \mathbin{\&} \neg p) \longleftrightarrow$

$(\triangleright p \to p) \mathbin{\&} \triangleright\neg\triangleright p \longleftrightarrow$

$[(\triangleright p \to p) \mathbin{\&} \triangleright\triangleright p] \longrightarrow [(\triangleright p \to p) \mathbin{\&} \triangleright p] \longleftrightarrow [\triangleright p \mathbin{\&} p]$. $\dashv$

Следующая лемма дает способ нахождения полной гильбертовской аксиоматики логики разрешимости над любой нормальной логикой, содержащей $\mathbf{T}$.

Лемма 4.4.4. *Пусть нормальная логика L аксиоматизирована над $\mathbf{T}$ множеством аксиом $\Gamma \subseteq \mathbf{Fm}^{\Box}$. Тогда логика разрешимости над L имеет следующую аксиоматику: $L^{\triangleright} = \mathbf{T}^{\triangleright} + \mathsf{Tr}(\Gamma)$, где $\mathsf{Tr}(\Gamma) := \{\mathsf{Tr}(A) \mid A \in \Gamma\}$.*

Доказательство. Корректность. Поскольку $L \vdash A \leftrightarrow \mathsf{tr}(\mathsf{Tr}(A))$ для любой $A \in \mathbf{Fm}^{\Box}$, в L доказуемы tr-переводы аксиом $L^{\triangleright}$.

Полнота. Ввиду $(L^{\triangleright})^{\boxdot} \supseteq (\mathbf{T}^{\triangleright})^{\boxdot} = \mathbf{T}$ и $(L^{\triangleright})^{\boxdot} \supseteq \Gamma$ имеем $(L^{\triangleright})^{\boxdot} \supseteq L$. $\dashv$

Наконец, покажем, что переход от логики L к логике $L^{\triangleright}$ является инъективным гомоморфизмом решетки (по включению) расширений логики $\mathbf{T}$.

Лемма 4.4.5. *Для любых $\Box$-логик L, M, содержащих $\mathbf{T}$, имеем: $L \subset M \Leftrightarrow L^{\triangleright} \subset M^{\triangleright}$.*

Доказательство. Достаточно проверить сохранение нестрогого включения. Из того, что $L \subseteq M$, следует $L^{\triangleright} \subseteq M^{\triangleright}$. Обратно, если $L^{\triangleright} \subseteq M^{\triangleright}$, то $L = (L^{\triangleright})^{\boxdot} \subseteq (M^{\triangleright})^{\boxdot} = M$ $\dashv$

4.5. Неустранимость сечения и интерполяция

Здесь мы установим, что во всех построенных в разделе 4.1 секвенциальных исчислениях $[L^{\triangleright}_{\kappa}]$ сечение не устранимо, но в то же время логики $L^{\triangleright}$ обладают интерполяционным свойством Крейга.

Теорема 4.5.1. *В исчислениях $[L^{\triangleright}_{\kappa}]$, где $L \in \{\mathbf{T}, \mathbf{S4}, \mathbf{S5}, \mathbf{B}, \mathbf{Grz}\}$, $\kappa = 1, 2$, сечение не устранимо.*

Доказательство. **1)** В лемме 4.1.4 (б) установлено, что секвенция $\triangleright(p \to \triangleright p), p \Rightarrow \triangleright p$ выводима в $[\mathbf{T}_2^{\triangleright}]^-$, а значит и во всех исчислениях $[L_\kappa^{\triangleright}]$. Покажем, что она не выводима без сечения в исчислениях $[\mathbf{B}_1^{\triangleright}]$ и $[L_\kappa^{\triangleright}]$ для $L \neq \mathbf{B}$.

Допустим, существует ее вывод без сечений в одном из этих исчислений. Последним применением неструктурного правила в этом выводе могло быть только применение одного из правил $({}^{\triangleright}_{\neg}\!\Rightarrow)$, $(\Rightarrow^{\triangleright}_{\neg})$, $(\Rightarrow^{\triangleright}_{L})$ или $(\Rightarrow^{\triangleright r}_{L})$, при этом первые два исключаются сразу, ибо формулы вида $\triangleright\neg A$ наследуются в выводах без сечений, а в нашей секвенции нет таких формул или подформул. Заключение этого применения должно иметь вид:

$$[\triangleright(p \to \triangleright p)]^\ell, [p]^m \Rightarrow [\triangleright p]^n, \quad \ell, m, n \geqslant 0,$$

поскольку далее в этом выводе применялись лишь правила ослабления и сокращения. Легко видеть, что при $L \neq \mathbf{B}$ заключения правил $(\Rightarrow^{\triangleright}_{L})$ и $(\Rightarrow^{\triangleright r}_{L})$ могут иметь данный вид лишь при $\ell = m = 0$ и $n > 0$; то же верно для правила $(\Rightarrow^{\triangleright}_{\mathbf{B}})$. Однако из семантических соображений (используя доказанную теорему о полноте) ясно, что секвенция $\Rightarrow [\triangleright p]^n$ не выводима в рассматриваемых исчислениях.

2) Покажем, что секвенция $\triangleright p \Rightarrow \triangleright\neg p$ выводима даже в $[\mathbf{T}_2^{\triangleright}]^-$, но не выводима в $[\mathbf{B}_2^{\triangleright}]$ без сечений.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \Rightarrow p}{\Rightarrow p, \neg p}}{\triangleright p \Rightarrow p, \triangleright\neg p} \qquad \dfrac{\dfrac{p \Rightarrow p}{p, \neg p \Rightarrow}}{p, \triangleright p \Rightarrow \triangleright\neg p}}{\triangleright p \Rightarrow \triangleright\neg p}$$

Допустим, существует ее вывод без сечений в $[\mathbf{B}_2^{\triangleright}]$. Опять последним применением неструктурного правила в этом выводе могло быть только применение правила $(\Rightarrow^{\triangleright r}_{\mathbf{B}})$. Его заключение имеет вид:

$$[\triangleright p]^m \Rightarrow [\triangleright\neg p]^n, \quad m, n \geqslant 0.$$

Сопоставляя эту секвенцию с обозначениями из формулировки правила ($\Rightarrow^{\triangleright r}_{\mathbf{B}}$), имеем: $\Pi = \Lambda = \varnothing$, $\Sigma' = [\triangleright p]^m$, $\Sigma = [\triangleright\neg p]^{n-1}$. Посылка этого применения, отвечающая разбиению $\Phi = \Phi' = \varnothing$, $\Psi = \Sigma$ и $\Psi' = \Sigma'$, будет иметь вид:

$$p^{\overline{r}} \Rightarrow p^r, [\triangleright\triangleright p]^m, [\triangleright\triangleright\neg p]^n.$$

Покажем, что последняя секвенция не выводима в $[\mathbf{B}^{\triangleright}_2]$. Допустим, что она выводима, тогда по теореме о полноте

$$\mathbf{B}^{\triangleright} \vdash p^{\overline{r}} \to (p^r \vee \triangleright\triangleright p \vee \triangleright\triangleright\neg p).$$

Пусть $r = 0$ (случай $r = 1$ рассматривается аналогично). Тогда по аксиоме ($\mathsf{A}^{\triangleright}_{\neg}$) и правилу ($\mathsf{RE}^{\triangleright}$)получаем $\mathbf{B}^{\triangleright} \vdash p \to \triangleright\triangleright p$. Подставив $\neg p$ вместо p, мы выведем $\mathbf{B}^{\triangleright} \vdash \neg p \to \triangleright\triangleright p$. Отсюда $\mathbf{B}^{\triangleright} \vdash \triangleright\triangleright p$, т. е. $\mathbf{B}^{\triangleright} = \mathbf{S5}^{\triangleright}$, но по лемме 4.4.5 включение $\mathbf{B}^{\triangleright} \subset \mathbf{S5}^{\triangleright}$ является строгим. $\dashv$

Определение 4.5.2. Логика L обладает (*интерполяционным*) *свойством Крейга*, если из $L \vdash A \to C$ следует существование такой формулы B (*интерполянта*), что $L \vdash A \to B$, $L \vdash B \to C$ и $\mathrm{Var}\, B \subseteq \mathrm{Var}\, A \cap \mathrm{Var}\, C$. Здесь $\mathrm{Var}\, A$ обозначает множество переменных, входящих в формулу A.

Лемма 4.5.3. *Логика $L \subseteq \mathbf{Fm}^{\Box}$, содержащая $\mathbf{T}$, обладает свойством Крейга $\Longleftrightarrow$ логика $L^{\triangleright}$ обладает им.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Воспользуемся установленной в лемме 4.4.1 выводимостью: $\mathbf{T} \vdash A \leftrightarrow \mathsf{tr}(\mathsf{Tr}(A))$ для всякой $\Box$-формулы A.

Пусть $L^{\triangleright} \vdash A \to C$, т. е. $L \vdash \mathsf{tr}(A) \to \mathsf{tr}(C)$. По свойству Крейга для логики L имеем: $\exists B \in \mathbf{Fm}^{\Box}$: $\mathrm{Var}\, B \subseteq \mathrm{Var}\, A \cap \mathrm{Var}\, C$, $L \vdash \mathsf{tr}(A) \to B$, $B \to \mathsf{tr}(C)$. Тогда $L \vdash \mathsf{tr}(A) \to \mathsf{tr}(\mathsf{Tr}(B))$, $\mathsf{tr}(\mathsf{Tr}(B)) \to \mathsf{tr}(C)$. Отсюда $L^{\triangleright} \vdash A \to \mathsf{Tr}(B)$, $\mathsf{Tr}(B) \to C$. Таким образом, $\mathsf{Tr}(B)$ является интерполянтом $A \to C$ в $L^{\triangleright}$.

($\Leftarrow$) Провести те же рассуждения, поменяв ролями переводы Tr и tr и используя доказанный в лемме 4.4.1 факт: $\mathbf{T}^{\triangleright} \vdash A \leftrightarrow \mathsf{Tr}(\mathsf{tr}(A))$ для любой $\triangleright$-формулы A. $\dashv$

Следствие 4.5.4. *Логики* $L^{\triangleright}$, $L \in \{\mathbf{T}, \mathbf{S4}, \mathbf{B}, \mathbf{S5}, \mathbf{Grz}, \mathbf{S4.1}\}$, *обладают интерполяционным свойством Крейга.*

Доказательство. Следует из известного свойства Крейга для логик L (см. [12, 31]) и леммы 4.5.3. $\dashv$

4.6. Логика доказательств с оператором сильной разрешимости

Логики доказательств с оператором доказуемости $\Box A$, интерпретируемым как ‘A доказуемо’, отвечающие некоторым естественным классам предикатов доказательства в арифметике, были построены в работе [7]. Соответствующие им логики доказательств с оператором сильной доказуемости $\boxdot A$, интерпретируемым как ‘A истинно и доказуемо’, аксиоматизированы в [26]. В этом, заключительном разделе настоящей главы мы построим полные аксиоматики логик доказательств с оператором (сильной) разрешимости $\triangleright A$, определяемым как $\triangleright A = \boxdot A \vee \boxdot \neg A$, докажем их арифметическую полноту и изучим для них вопрос об интерполяционном свойстве Крейга.

Язык логик доказательств, построенных в [7], содержит два сорта переменных: по высказываниям $\mathrm{SV} = \{S_0, S_1, \ldots\}$ и по доказательствам $\mathrm{PV} = \{p_0, p_1, \ldots\}$, символы $\bot$, $\to$, $\Box$ и для каждой $p \in \mathrm{PV}$ оператор $\Box_p$ (помеченная модальность). Схема построения множества $\mathbf{Fm}_p^{\Box}$ формул этого языка следующая:

$$\bot \mid S_i \mid A \to B \mid \Box A \mid \Box_p A.$$

Аксиоматика базовой логики $\mathcal{B}\mathbf{Grz}$: в формулировке исчисления $\mathbf{Grz}$ (см. главу 1) все аксиомы заменить на соответствующие *схемы* аксиом, удалить правило подстановки (Sub) и добавить следующие схемы аксиом:

$$\begin{array}{lll} (\mathsf{A}^{\Box}_{qr}) & \Box_p A \to A & \text{(квази-рефлексивность)} \\ (\mathsf{A}^{\Box}_{qs+}) & \Box_p A \to \Box\Box_p A & \text{(квази-стабильность)} \\ (\mathsf{A}^{\Box}_{qs-}) & \neg\Box_p A \to \Box\neg\Box_p A & \text{(квази-стабильность)} \end{array}$$

Аксиоматика функциональной и гёделевской логик доказательств:

$$\mathcal{F}\mathbf{Grz} = \mathcal{B}\mathbf{Grz} + (\mathsf{A}^{\Box}_{f}), \qquad \mathcal{M}\mathbf{Grz} = \mathcal{F}\mathbf{Grz}^{\triangleright} + (\mathsf{A}^{\Box}_{m}),$$

где дополнительные схемы аксиомы имеют вид:

$$\begin{array}{ll} (\mathsf{A}^{\Box}_{f}) & \Box_p A \mathbin{\&} \Box_p B \to (C \to D), \text{ если } C = D \pmod{A = B}, \\ & \text{(аксиома функциональности)} \\ (\mathsf{A}^{\Box}_{m}) & \neg[\Box_{q_1} A_2(q_2) \mathbin{\&} \Box_{q_2} A_3(q_3) \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \Box_{q_n} A_1(q_1)], \\ & \text{где } n \geqslant 1,\ q_i \in \mathrm{PV}, \text{ формула } A_i(q_i) \text{ содержит } q_i, \\ & \text{(аксиома монотонности)} \end{array}$$

а отношение $C = D \pmod{A = B}$ на формулах этого языка, введенное в [7], означает (символ $\equiv$ есть графическое равенство):

$$\text{для любой подстановки } \theta\ \ (A\theta \equiv B\theta \Longrightarrow C\theta \equiv D\theta).$$

Далее, как и раньше, вводим язык $\mathbf{Fm}^{\triangleright}_{p}$, отличающийся от $\mathbf{Fm}^{\Box}_{p}$ лишь заменой символа $\Box$ на $\triangleright$. Переводы tr и Tr, а также понятие логики разрешимости над логикой в языке $\mathbf{Fm}^{\Box}_{p}$ определяется обычным образом (см. стр. 14 и 58).

Теперь сформулируем нашу аксиоматику логик доказательств с оператором сильной разрешимости. Аксиоматика логики $\mathcal{B}\mathbf{Grz}^{\triangleright}$: в формулировке исчисления $\mathbf{Grz}^{\triangleright}$ (см. раздел 4.1) аксиомы заменить на *схемы* аксиом, удалить правило (Sub) и добавить следующие схемы аксиом:

$$\begin{array}{lll} (\mathsf{A}^{\triangleright}_{qr}) & \Box_p A \to A & \text{(квази-рефлексивность)} \\ (\mathsf{A}^{\triangleright}_{qd}) & \triangleright\Box_p A & \text{(квази-разрешимость)} \end{array}$$

Аксиоматика функциональной и гёделевской логик доказательств:

$$\mathcal{F}\mathbf{Grz}^{\triangleright} = \mathcal{B}\mathbf{Grz}^{\triangleright} + (\mathsf{A}_f^{\triangleright}), \qquad \mathcal{M}\mathbf{Grz}^{\triangleright} = \mathcal{F}\mathbf{Grz}^{\triangleright} + (\mathsf{A}_m^{\triangleright}),$$

где аксиомы $(\mathsf{A}_f^{\triangleright})$ и $(\mathsf{A}_m^{\triangleright})$ формулируются аналогично аксиомам $(\mathsf{A}_f^{\Box})$ и $(\mathsf{A}_m^{\Box})$, но уже в языке $\mathbf{Fm}_p^{\triangleright}$.

Теорема 4.6.1 (О полноте). *Для каждой $\mathcal{L} \in \{\mathcal{B}, \mathcal{F}, \mathcal{M}\}$ и любой формулы A языка $\mathbf{Fm}_p^{\triangleright}$ имеет место эквивалентность: $\mathcal{L}\mathbf{Grz}^{\triangleright} \vdash A \iff \mathcal{L}\mathbf{Grz} \vdash A_{\triangleright}$.*

Доказательство. Воспользуемся доказанной ранее леммой 4.4.2, которая легко переносится на логики в языке с помеченными модальностями, и представленной в статье [26] аксиоматикой логик $\mathcal{L}\mathbf{Grz}$.

Корректность следует из доказанной нами корректности логики $\mathbf{Grz}^{\triangleright}$ (см. теорему 4.3.1), очевидной выводимости: $\mathcal{L}\mathbf{Grz} \vdash \Box\Box_p A \vee \Box\neg\Box_p A$ и сохранения отношения $C = D \pmod{A = B}$ при tr-переводе.

Полнота вытекает из легко проверяемых выводимостей

$$\mathcal{L}\mathbf{Grz}^{\triangleright} \vdash \mathsf{Tr}(\mathsf{A}_{qs+}^{\Box}), \text{ то есть } \quad \mathcal{L}\mathbf{Grz}^{\triangleright} \vdash \Box_p A \to (\Box_p A \,\&\, \triangleright\Box_p A),$$
$$\mathcal{L}\mathbf{Grz}^{\triangleright} \vdash \mathsf{Tr}(\mathsf{A}_{qs-}^{\Box}), \text{ то есть } \quad \mathcal{L}\mathbf{Grz}^{\triangleright} \vdash \neg\Box_p A \to (\neg\Box_p A \,\&\, \triangleright\neg\Box_p A),$$

и полноты логики $\mathbf{Grz}^{\triangleright}$, доказанной в теореме 4.3.1. ⊣

Сведем вопрос об арифметической полноте логик $\mathcal{L}\mathbf{Grz}^{\triangleright}$ к тому же вопросу для логик $\mathcal{L}\mathbf{Grz}$.

Определение 4.6.2. Арифметической $\mathcal{L}$-*интерпретацией*, где $\mathcal{L} \in \{\mathcal{B}, \mathcal{F}, \mathcal{M}\}$, называется пара $* = (Prf, \dagger)$, где Prf есть стандартный при $\mathcal{L} = \mathcal{B}$, функциональный при $\mathcal{L} = \mathcal{F}$ и гёделевский при $\mathcal{L} = \mathcal{M}$ предикат доказательства в арифметике Пеано $\mathbf{PA}$ (определения можно найти в [7, 26]), $\dagger$ есть оценка переменных по доказательствам нумералами для натуральных чисел и переменных по высказываниям арифметическими предложениями. Соответствующий предикат доказуемости определяется как $Pr(y) := \exists x \; Prf(x, y)$.

Всякая $\mathcal{L}$-интерпретация $*$ задает перевод $^{(*,\Box)}$ формул языка $\mathbf{Fm}_p^{\Box}$ и перевод $^{(*,\rhd)}$ формул языка $\mathbf{Fm}_p^{\rhd}$ в язык арифметики. Они отличаются лишь пунктом, касающимся непомеченной модальности:

$$(\Box A)^{(*,\Box)} = A^{(*,\Box)} \,\&\, Pr(\ulcorner A^{(*,\Box)} \urcorner),$$
$$(\rhd A)^{(*,\rhd)} = A^{(*,\rhd)} \,\&\, Pr(\ulcorner A^{(*,\rhd)} \urcorner) \vee \neg A^{(*,\rhd)} \,\&\, Pr(\ulcorner \neg A^{(*,\rhd)} \urcorner).$$

Сравнивая их, замечаем, что для любой формулы $A \in \mathbf{Fm}_p^{\rhd}$ и любой интерпретации $*$ справедливо графическое равенство

$$A^{(*,\rhd)} \equiv (A_{\rhd})^{(*,\Box)}$$

Лемма 4.6.3. *Для* $\mathcal{L} \in \{\mathcal{B}, \mathcal{F}, \mathcal{M}\}$ *логика* $\mathcal{L}\mathbf{Grz}^{\rhd}$ *арифметически полна относительно класса всех стандартных, всех функциональных и гёделевского предикатов доказательства соответственно, т. е. для любой формулы* A *языка* $\mathbf{Fm}_p^{\rhd}$

$$\mathcal{L}\mathbf{Grz}^{\rhd} \vdash A \Longleftrightarrow \mathbf{PA} \vdash A^{(*,\rhd)} \text{ для любой } \mathcal{L}\text{-интерпретации } *.$$

Доказательство. Воспользуемся доказанной в [26] арифметической полнотой логики $\mathcal{L}\mathbf{Grz}$.

$\mathcal{L}\mathbf{Grz}^{\rhd} \vdash A \Leftrightarrow \mathcal{L}\mathbf{Grz} \vdash A_{\rhd} \Leftrightarrow$ (ввиду арифметической полноты $\mathcal{L}\mathbf{Grz}$)

$\Leftrightarrow \mathbf{PA} \vdash (A_{\rhd})^{(*,\Box)}$ для любой $\mathcal{L}$-интерпретации $*$

$\Leftrightarrow \mathbf{PA} \vdash A^{(*,\rhd)}$ для любой $\mathcal{L}$-интерпретации $*$. $\dashv$

Обозначим через $\mathrm{SV}(A)$ и $\mathrm{PV}(A)$ множества переменных по высказываниям и переменных по доказательствам, входящих в формулу A, $\mathrm{Var}\, A := \mathrm{SV}(A) \cup \mathrm{PV}(A)$.

Определение 4.6.4. Логика L (в языке $\mathbf{Fm}_p^{\Box}$ или $\mathbf{Fm}_p^{\rhd}$) обладает *слабым* (*сильным*) интерполяционным свойством Крейга, если из $L \vdash A \to C$ следует существование такой формулы B, что $L \vdash A \to B$, $L \vdash B \to C$ и $\mathrm{SV}(B) \subseteq \mathrm{SV}(A) \cap \mathrm{SV}(C)$ (соотв. $\mathrm{Var}\, B \subseteq \mathrm{Var}\, A \cap \mathrm{Var}\, C$).

Следствие 4.6.5. *Логика* $\mathcal{B}\mathbf{Grz}^{\rhd}$ *обладает сильным, а логики* $\mathcal{F}\mathbf{Grz}^{\rhd}$ *и* $\mathcal{M}\mathbf{Grz}^{\rhd}$ *не обладают даже слабым интерполяционным свойством Крейга.*

Доказательство. Лемма 4.5.3 дословно переносится на логики в языке $\mathbf{Fm}_p^{\Box}$ и понятия сильного и слабого свойств Крейга. Остается воспользоваться соответствующими результатами, полученными в работе [2] для логик $\mathcal{L}\mathbf{Grz}$, $\mathcal{L} \in \{\mathcal{B}, \mathcal{F}, \mathcal{M}\}$. $\dashv$

Глава 5.

Определимые классы шкал

В этой, заключительной, главе мы изучим вопросы выразимости свойств шкал Крипке формулами $\rhd$-языка. Ввиду того, что $\rhd$-язык вкладывается в $\Box$-язык (посредством перевода tr), выразительные возможности $\rhd$-языка очевидным образом не больше, чем у $\Box$-языка. Оказывается, что они существенно меньше, что будет установлено в разделе 5.1. Далее, в разделе 5.2 мы предъявим формулы первого порядка, задающие те же классы шкал Крипке, что и $\rhd$-аксиомы некоторых логик разрешимости, рассмотренных в предыдущих главах.

5.1. Определимость классов шкал в $\rhd$-языке

В этом разделе мы попытаемся выявить „верхнюю границу“ выразительных возможностей $\rhd$-языка, указав условие на класс шкал, необходимое для его определимости в $\rhd$-языке. Сначала дадим несколько определений.

Определение 5.1.1. Класс шкал $\mathcal{G}$ назовем $\Box$-*определимым* (в классе $\mathcal{F}$), если существует такое множество $\Box$-формул Γ, что для любой шкалы F (из $\mathcal{F}$) имеем: $F \in \mathcal{G} \Leftrightarrow F \models \Gamma$; при этом мы говорим, что множество Γ $\Box$-*определяет* класс $\mathcal{F}$. Множество $\Box$-формул Γ $\Box$-*выражает* некоторое свойство отношения достижимости в шкалах Крипке, если Γ общезначимо на шкале $F = \langle W, \uparrow\rangle$ тогда и только тогда, когда отношение $\uparrow$ обладает данным свойством; при этом говорим, что это свойство $\Box$-*выразимо*. Аналогично вводятся соответствующие понятия для $\rhd$-языка.

Обозначим посредством $\mathfrak{Func}$, $\mathfrak{Refl}$, $\mathfrak{Tran}$ и $\mathfrak{Eucl}$ классы функциональных, рефлексивных, транзитивных и евклидовых шкал соответственно. Для начала установим позитивный результат о выразительных возможностях $\rhd$-языка.

Лемма 5.1.2. **(а)** *Если класс $\mathcal{F}$ $\rhd$-определим в $\mathcal{G}$, то $\mathcal{F}$ $\Box$-определим в $\mathcal{G}$.*

(б) *Если класс $\mathcal{F}$ $\Box$-определим в $\mathcal{G}$, то класс $\mathcal{F}' := \mathcal{F} \cap \mathfrak{Refl}$ является $\rhd$-определимым в $\mathcal{G}' := \mathcal{G} \cap \mathfrak{Refl}$.*

Доказательство. **(а)** Из того, что $F \models A \Leftrightarrow F \models \mathsf{tr}(A)$ для любой шкалы F и произвольной $\rhd$-формулы A, следует, что если множество Γ $\rhd$-определяет класс $\mathcal{F}$, то $\mathsf{tr}(\Gamma)$ $\Box$-определяет тот же класс $\mathcal{F}$.

(б) Для любой рефлексивной шкалы F и произвольной $\Box$-формулы A справедливо: $F \models A \Leftrightarrow F \models \mathsf{Tr}(A)$. Поэтому, если множество Γ $\Box$-определяет класс $\mathcal{F}$ в $\mathcal{G}$, то $\mathsf{Tr}(\Gamma)$ $\rhd$-определяет класс $\mathcal{F}'$ в $\mathcal{G}'$. $\dashv$

Лемма 5.1.3. *Если Γ определяет класс шкал $\mathcal{F}$, Δ определяет класс шкал $\mathcal{G}$ и $\Gamma \subseteq \Delta$, то $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. (Лемма справедлива для $\Box$- и для $\rhd$-языка.)*

Доказательство. По условию, $\forall F\ (F \in \mathcal{F} \Leftrightarrow F \models \Gamma)$ и $\forall G\ (G \in \mathcal{G} \Leftrightarrow G \models \Delta)$. Тогда для любой шкалы F имеем: $F \in \mathcal{G} \Leftrightarrow F \models \Delta \Rightarrow F \models \Gamma \Leftrightarrow F \in \mathcal{F}$, что и означает включение $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. $\dashv$

В работе [17] было показано, что $\mathbf{Ver}^{\rhd} = \mathcal{L}^{\rhd}(\mathfrak{Func})$, и более того, логика $\mathbf{Ver}^{\rhd}$ $\rhd$-определяет класс $\mathfrak{Func}$. Мы воспользуемся этим результатом и теоремой 2.2.1 из главы 2, утверждающей, что логика $\mathbf{Ver}^{\rhd}$ является наибольшей непротиворечивой логикой разрешимости, с тем чтобы установить, что класс всех функциональных шкал является наименьшим $\rhd$-определимым классом.[1]

[1]Это утверждение аналогично тому, что, как установлено в [21], всякая непротиворечивая нормальная логика содержится либо в **Triv**, либо в **Ver**, и следовательно, любой непустой $\Box$-определимый класс шкал

Теорема 5.1.4. *Если класс шкал $\mathcal{F} \neq \varnothing$ является $\rhd$-определимым, то $\mathfrak{Func} \subseteq \mathcal{F}$.*

Доказательство. Предположим, что множество формул Γ $\rhd$-выражает класс $\mathcal{F}$. Рассмотрим $\Box$-логику данного класса: $L := \mathcal{L}^{\Box}(\mathcal{F})$. Тогда $\Gamma \subseteq L^{\rhd}$, поскольку ввиду $\mathcal{F} \models \Gamma$ имеем $\mathcal{F} \models \mathsf{tr}(\Gamma)$, откуда $\mathsf{tr}(\Gamma) \subseteq L$ и получается требуемое включение. По теореме 2.2.1 имеем: $L^{\rhd} \subseteq \mathbf{Ver}^{\rhd}$. В частности, $\Gamma \subseteq \mathbf{Ver}^{\rhd}$. Пользуясь леммой 5.1.3, заключаем, что $\mathfrak{Func} \subseteq \mathcal{F}$. ⊣

Следствие 5.1.5. *Классы рефлексивных, сериальных, транзитивных, симметричных, евклидовых шкал, а также любые подклассы перечисленных классов не являются $\rhd$-определимыми.*

Данное следствие частично (для первых пяти классов) было получено в работе [17] из несколько других соображений. К вопросам определимости шкал в $\rhd$-языке мы вернемся в следующем разделе.

Далее докажем лемму, которая носит вспомогательный характер.

Лемма 5.1.6. *Пусть $L = \mathcal{L}^{\Box}(\mathcal{F})$, где $\mathcal{F}$ — некоторый класс шкал, тогда $L^{\rhd} = \mathcal{L}^{\rhd}(\mathcal{F})$.*

Доказательство. Для любой $\rhd$-формулы A имеем цепь эквивалентностей:

$$A \in \mathcal{L}^{\rhd}(\mathcal{F}) \iff \mathcal{F} \models A \iff \mathcal{F} \models A_{\rhd} \iff A_{\rhd} \in L \iff A \in L^{\rhd}. \qquad \dashv$$

Теперь мы установим, что переход от логики L к логике $L^{\rhd}$ сохраняет полноту по Крипке; более того, является сюръективным отображением класса полных логик из интервала $[\mathbf{K}, \mathbf{Fm}^{\Box})$ на класс полных логик из интервала $[\mathbf{K}^{\rhd}, \mathbf{Ver}^{\rhd}]$. Кроме того, мы получим аналогичный результат для классов финитно аппроксимируемых логик из тех же интервалов.

Теорема 5.1.7.

содержит одноточечную рефлексивную либо одноточечную иррефлексивную шкалу.

(а) *Если $\Box$-логика L полна относительно класса шкал $\mathcal{F}$, то $L^{\triangleright}$ полна относительно того же класса шкал $\mathcal{F}$. В частности, если L является финитно аппроксимируемой, то $L^{\triangleright}$ тоже является таковой.*

(б) *Если $\triangleright$-логика M полна относительно класса шкал $\mathcal{F}$, то $M = L^{\triangleright}$ для некоторой логики L, полной относительно того же класса шкал $\mathcal{F}$. В частности, если M является финитно аппроксимируемой, то $M = L^{\triangleright}$ для некоторой финитно аппроксимируемой логики L.*

Доказательство. **(а)** Пусть $L = \mathcal{L}^{\Box}(\mathcal{F})$. Тогда по лемме 5.1.6 получаем $L^{\triangleright} = \mathcal{L}^{\triangleright}(\mathcal{F})$.
(б) По условию $M = \mathcal{L}^{\triangleright}(\mathcal{F})$. Положив $L := \mathcal{L}^{\Box}(\mathcal{F})$, по лемме 5.1.6 получим $M = L^{\triangleright}$. $\dashv$

Рассматриваемое отображение $L \mapsto L^{\triangleright}$ не является инъективным, как показывает следующий пример. Рассмотрим логики $\mathbf{Triv} = \mathbf{K} + (\Box p \leftrightarrow p)$ и $\mathbf{Ver} = \mathbf{K} + \Box p$. Очевидно, что $\mathbf{Triv} \neq \mathbf{Ver}$. Однако $\mathbf{Triv}^{\triangleright} = \mathbf{Ver}^{\triangleright}$, поскольку $\mathbf{Triv}^{\triangleright} \vdash \triangleright p$, а логика $\mathbf{Ver}^{\triangleright}$ является наибольшей логикой разрешимости по теореме 2.2.1. Аналогичным образом можно показать, что если L — нормальная логика, содержащая аксиому функциональности $\Diamond p \to \Box p$, то $L^{\triangleright} = \mathbf{Ver}^{\triangleright}$. В то же время, ограничение данного отображения на решетку расширений логики $\mathbf{T}$ уже является инъективным, что было установлено в главе 4 (см. лемму 4.4.5).

Мы завершим данный раздел следующим наблюдением: добавление класса $\mathfrak{Func}$ к произвольному непустому классу не меняет $\triangleright$-логику последнего. Тем самым, всякая непротиворечивая полная $\triangleright$-логика может быть представлена как $\triangleright$-логика некоторого класса шкал, содержащего класс $\mathfrak{Func}$.

Лемма 5.1.8. $\mathcal{L}^{\triangleright}(\mathcal{F}) = \mathcal{L}^{\triangleright}(\mathcal{F} \cup \mathfrak{Func})$ *для любого класса шкал $\mathcal{F} \neq \varnothing$.*

Доказательство состоит в применении следующих утверждений:

а) $\mathcal{L}^{\triangleright}(\mathcal{F} \cup \mathcal{G}) = \mathcal{L}^{\triangleright}(\mathcal{F}) \cap \mathcal{L}^{\triangleright}(\mathcal{G})$ для любых классов $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$;

б) в силу непустоты класса $\mathcal{F}$ его $\Box$-логика $L = \mathcal{L}^{\Box}(\mathcal{F})$ непротиворечива, а значит $L^{\triangleright} \subseteq \mathbf{Ver}^{\triangleright}$ по теореме 2.2.1;

в) $\mathcal{L}^{\triangleright}(\mathcal{F}) \subseteq \mathbf{Ver}^{\triangleright}$, поскольку $\mathcal{L}^{\triangleright}(\mathcal{F}) = L^{\triangleright}$ по лемме 5.1.6.

Действительно, $\mathcal{L}^{\triangleright}(\mathcal{F} \cup \mathfrak{Func}) = \mathcal{L}^{\triangleright}(\mathcal{F}) \cap \mathcal{L}^{\triangleright}(\mathfrak{Func}) = \mathcal{L}^{\triangleright}(\mathcal{F}) \cap \mathbf{Ver}^{\triangleright} = \mathcal{L}^{\triangleright}(\mathcal{F})$. ⊣

5.2. Элементарные эквиваленты для $\triangleright$-формул

В этом разделе мы установим, что некоторые из $\triangleright$-аксиом, рассматривавшихся нами в разделах 2.1 и 4.1, выражают свойства шкал, определимые в языке первого порядка. Для начала введем несколько понятий и обозначений, удобных в дальнейшем.

Истинность формулы φ первого порядка в шкале $F = \langle W, \uparrow \rangle$ будем обозначать посредством $F \overset{1}{\models} \varphi$. Утверждение ‘множества X и Y пересекаются’ будем записывать как $X \between Y$, вместо более длинной записи $X \cap Y \neq \varnothing$.

При задании оценки переменных на шкале будем обозначать:

$$
\begin{aligned}
!x \models p \quad &\leftrightharpoons \quad (x \models p \;\&\; \forall y \neq x \;\; y \not\models p);\\
!x \not\models p \quad &\leftrightharpoons \quad (x \not\models p \;\&\; \forall y \neq x \;\; y \models p).
\end{aligned}
$$

Точку w шкалы $F = \langle W, \uparrow \rangle$ назовем *функциональной*, если из нее достижимо не более одной точки; это свойство выражается следующей формулой первого порядка:

$$
Fnc(w) \quad \leftrightharpoons \quad \forall x, y {\downarrow} w \; (x = y).
$$

Точку w, не являющуюся функциональной, будем называть *ветвящейся* и этот факт будем записывать посредством $Bra(w)$. Введем сокращения для ограниченных кванторов по ветвящимся точкам:

$$
\begin{aligned}
\widehat{\forall} w \; \varphi(w) \quad &\leftrightharpoons \quad \forall w[Bra(w) \to \varphi(w)];\\
\widehat{\exists} w \; \varphi(w) \quad &\leftrightharpoons \quad \exists w[Bra(w) \wedge \varphi(w)].
\end{aligned}
$$

Кроме того, ограниченные кванторы по ветвящимся точкам, достижимым из точки w, будем обозначать следующим образом:

$$\begin{array}{rcl} \widehat{\forall} x{\downarrow}w\ \varphi(x) & \leftrightharpoons & \widehat{\forall} x[w{\uparrow}x \to \varphi(x)]; \\ \widehat{\exists} x{\downarrow}w\ \varphi(x) & \leftrightharpoons & \widehat{\exists} x[w{\uparrow}x \wedge \varphi(x)]. \end{array}$$

Наконец, существование ветвящейся точки, достижимой из точки w, будем записывать посредством $\widehat{\exists} x{\downarrow}w$, что равносильно формуле $\widehat{\exists} x{\downarrow}w\top$.

Напомним, что формула $\rhd p$ определяет класс $\mathfrak{Func}$ функциональных шкал, т. е. удовлетворяющих условию: $\widehat{\forall} w\bot$. В доказываемой ниже теореме мы устанавливаем, что классы шкал, определяемые $\rhd$-формулами:

$$\begin{array}{ll} (\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{T}}) & p \to [\rhd(p \to q) \to (\rhd p \to \rhd q)] \\ (\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{4}}) & \rhd p \to \rhd(q \to \rhd p) \\ (\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{4}\flat}) & \rhd p \to \rhd\rhd p \\ (\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{5}}) & \neg\rhd p \to \rhd(q \to \neg\rhd p) \\ (\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{5}'}) & \rhd(\rhd p \to p) \\ (\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{5}\flat}) & \rhd\rhd p \end{array}$$

задаются следующими (соответствующими) формулами первого порядка (фигурные скобки означают конъюнкцию заключенных в них формул):

$$\begin{array}{ll} (\varphi^{\rhd}_{\mathbf{T}}) & \widehat{\forall} w \quad w{\uparrow}w \\ (\varphi^{\rhd}_{\mathbf{4}}) & \widehat{\forall} w\ \widehat{\forall} x{\downarrow}w\ \forall y{\downarrow}x \quad w{\uparrow}y \\ (\varphi^{\rhd}_{\mathbf{4}\flat}) & \widehat{\forall} w \left[\widehat{\forall} x{\downarrow}w\ (x{\uparrow} \subseteq w{\uparrow}) \vee \forall x, y{\downarrow}w \begin{Bmatrix} x{\uparrow} \setminus w{\uparrow} \ = \ y{\uparrow} \setminus w{\uparrow} \\ x{\uparrow} \cap w{\uparrow} \Leftrightarrow y{\uparrow} \cap w{\uparrow} \end{Bmatrix}\right] \\ (\varphi^{\rhd}_{\mathbf{5}}) & \widehat{\forall} w\ \forall x, y{\downarrow}w \quad x{\uparrow}y \\ (\varphi^{\rhd}_{\mathbf{5}'}) & \widehat{\forall} w\ \forall x, y{\downarrow}w \quad x{\uparrow}y \\ (\varphi^{\rhd}_{\mathbf{5}\flat}) & \widehat{\forall} w\ [\widehat{\exists} x{\downarrow}w \to \forall x, y{\downarrow}w\ (x{\uparrow} = y{\uparrow})] \end{array}$$

Теорема 5.2.1. *$F \models (\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathfrak{S}}) \iff F \stackrel{1}{\models} (\varphi^{\rhd}_{\mathfrak{S}})$, для каждого $\mathfrak{S} \in \{$**T**, **4**, **4**$\flat$, **5**, **5**$'$, **5**$\flat\}$ и произвольной шкалы F.*

Доказательство. Отметим, что утверждение для $\mathfrak{S} = \mathbf{T}$ содержится в статье [17]. В доказательстве части ($\Leftarrow$) теоремы мы будем из предположения $F \stackrel{1}{\models} (\varphi^{\rhd}_{\mathfrak{S}})$ выводить истинность формулы $(\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathfrak{S}})$ в любой точке w

шкалы F при любой оценке $\models$ переменных. Поскольку все рассматриваемые формулы $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathfrak{S}})$ принадлежат логике $\mathbf{Ver}^{\triangleright}$, которая, в свою очередь, истинна в любой функциональной точке w, то достаточно проверять истинность $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathfrak{S}})$ лишь в ветвящихся точках. Поэтому ниже в доказательстве части $(\Leftarrow)$ мы считаем, что выбрана шкала $F = \langle W, \uparrow\rangle$, такая что $F \models^{1} (\varphi^{\triangleright}_{\mathfrak{S}})$, некоторая оценка $\models$ на F и *ветвящаяся* точка w шкалы F.

$\underline{\mathfrak{S} = \mathbf{T}.}$

$(\Rightarrow)$ Допустим, $F \not\models^{1} (\varphi^{\triangleright}_{\mathbf{T}})$, т. е. $\widehat{\exists} w\ \neg(w{\uparrow}w)$. Это влечет, что $\exists x, y{\downarrow}w$: $x \neq y$. Для опровержения формулы $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{T}})$ положим $!w \models p$, $!x \models q$. Тогда $w \models p$; $w \models \triangleright p$, даже $w \models \Box\neg p$, ибо $\forall t{\downarrow}w\ t \not\models p$; $w \models \triangleright(p \to q)$, даже $w \models \Box(p \to q)$, ибо $\forall t{\downarrow}w\ t \models (p \to q)$; однако $w \not\models \triangleright q$, поскольку $x \models q$, но $y \not\models q$.

$(\Leftarrow)$ Пусть $w \models p, \triangleright p$; по $(\varphi^{\triangleright}_{\mathbf{T}})$ имеем $w{\uparrow}w$, поэтому $w \models \Box p$. Предположим также, что $w \models \triangleright(p \to q)$. Рассмотрим случаи:

а) $w \models \Box(p \to q)$, тогда ввиду $w \models \Box p$ получаем $w \models \Box q$.

б) $w \models \Box\neg(p \to q)$, т. е. $w \models \Box(p \wedge \neg q)$, откуда по монотонности $w \models \Box\neg q$.

В любом случае получили $w \models \triangleright q$.

$\underline{\mathfrak{S} = \mathbf{4}.}$ Ясно, что вместо $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{4}})$ достаточно рассматривать формулу $\Box p \to \triangleright(q \to \triangleright p)$.

$(\Rightarrow)$ Допустим, $F \not\models^{1} (\varphi^{\triangleright}_{\mathbf{4}})$, т. е. $\widehat{\exists} w\ \widehat{\exists} x{\downarrow}w\ \exists y{\downarrow}x$: $\neg(w{\uparrow}y)$. Положим $!x \models q$ и $!y \not\models p$. Тогда $w \models \Box p$, ибо $\neg(w{\uparrow}y)$; однако $w \not\models \triangleright(q \to \triangleright p)$, поскольку:

а) $w \models \Diamond(q \to \triangleright p)$, ибо ввиду $Bra(w)$ найдется такая точка $z{\downarrow}w$, что $z \neq x$, и в ней $z \not\models q$, а следовательно, $z \models (q \to \triangleright p)$.

б) $w \models \Diamond\neg(q \to \triangleright p)$, ибо $w{\uparrow}x$ и, во-первых, $x \models q$, а во-вторых, $x \not\models \triangleright p$, поскольку, с одной стороны, $x{\uparrow}y$ и $y \not\models p$, а с другой, $Bra(x)$, и значит найдется такая точка $t{\downarrow}x$, что $t \neq y$, и в ней $t \models p$.

$(\Leftarrow)$ Предположим, что $w \models \Box p$. Надо доказать: $w \models \triangleright(q \to \triangleright p)$. Мы установим даже: $w \models \Box(q \to \triangleright p)$. Берем любую точку $x{\downarrow}w$. Возможны варианты:

а) если $Fnc(x)$, то, очевидно, $x \models \rhd p$, и тем самым $x \models q \to \rhd p$.

б) если $Bra(x)$, то покажем, что имеет место даже $x \models \Box p$. Для этого возьмем произвольную точку $y{\downarrow}x$, тогда по $(\varphi^{\rhd}_{\mathbf{4}})$ имеем $w{\uparrow}y$, а ввиду $w \models \Box p$ заключаем $y \models p$.

<u>$\mathfrak{S} = \mathbf{4}\flat$.</u> Очевидно, что вместо $(\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{4}\flat})$ достаточно рассматривать формулу $\Box p \to \rhd\rhd p$.

$(\Rightarrow)$ Допустим, $F \not\models^{1} (\varphi^{\rhd}_{\mathbf{4}\flat})$, т. е. $\widehat{\exists} w\ \widehat{\exists} x_0{\downarrow}w$: $x_0{\uparrow} \not\subseteq w{\uparrow}$ и $\exists x, y{\downarrow}w$ такие, что неверно по крайней мере одно из двух условий в фигурных скобках в $(\varphi^{\rhd}_{\mathbf{4}\flat})$. Рассмотрим следующие случаи:

1) Хотя бы одна из точек x, y функциональна; для определенности, пусть $Fnc(y)$. Поскольку $Bra(x_0)$ и $x_0{\uparrow} \not\subseteq w{\uparrow}$, то $\exists s, t{\downarrow}x_0$: $s \neq t$, $\neg(w{\uparrow}s)$. Положим $!s \not\models p$. Тогда $w \models \Box p$, ибо $\neg(w{\uparrow}s)$; $y \models \rhd p$, ибо $Fnc(y)$; наконец, $x_0 \not\models \rhd p$, поскольку $s \not\models p$ и $t \models p$; следовательно, $w \not\models \rhd\rhd p$.

2) Обе точки x и y ветвящиеся. Возможны варианты:

а) $(x{\uparrow} \setminus w{\uparrow}) \neq (y{\uparrow} \setminus w{\uparrow})$. Ввиду симметричности можем считать, что $\exists s \in (x{\uparrow} \setminus w{\uparrow})$, $s \notin (y{\uparrow} \setminus w{\uparrow})$. Это значит: $x{\uparrow}s$, $\neg(y{\uparrow}s)$, $\neg(w{\uparrow}s)$. Положим $!s \not\models p$. Тогда имеем: $w \models \Box p$, ибо $\neg(w{\uparrow}s)$; $y \models \rhd p$, ибо даже $y \models \Box p$ ввиду $\neg(y{\uparrow}s)$; наконец, $x \not\models \rhd p$, поскольку $s \not\models p$, а ввиду $Bra(x)$ найдется такая точка $t{\downarrow}x$, что $t \neq s$, и в ней $t \models p$; следовательно, $w \not\models \rhd\rhd p$.

б) Предположим теперь, что $(x{\uparrow} \setminus w{\uparrow}) = (y{\uparrow} \setminus w{\uparrow})$, однако (опять ввиду симметричности) пусть $x{\uparrow} \cap w{\uparrow}$, но $y{\uparrow} \cap w{\uparrow} = \varnothing$. Положим переменную p истинной только в точках, достижимых из w. Тогда имеем: $w \models \Box p$ по построению; однако, $w \not\models \rhd\rhd p$. Действительно, с одной стороны, $y \models \rhd p$ и даже $y \models \Box\neg p$ ввиду $y{\uparrow} \cap w{\uparrow} = \varnothing$; а с другой, $x \not\models \rhd p$, поскольку из $x{\uparrow} \cap w{\uparrow}$ следует $x \models \Diamond p$, а из $(x{\uparrow} \setminus w{\uparrow}) = (y{\uparrow} \setminus w{\uparrow}) \neq \varnothing$ (неравенство верно в силу $Bra(y)$ и $y{\uparrow} \cap w{\uparrow} = \varnothing$) вытекает $x \models \Diamond\neg p$.

$(\Leftarrow)$ Согласно $(\varphi^{\rhd}_{\mathbf{4}\flat})$, возможны варианты:

1) $\widehat{\forall} x{\downarrow}w\ (x{\uparrow} \subseteq w{\uparrow})$. В этой ситуации мы докажем даже $w \models \Box p \to \Box\rhd p$.

Пусть $w \models \Box p$. Тогда для любого $x{\downarrow}w$ имеем: если $Fnc(x)$, то $x \models \rhd p$; если же $Bra(x)$, то $x{\uparrow} \subseteq w{\uparrow}$ по предположению, откуда $x \models \Box p$, и значит $x \models \rhd p$. В любом случае имеет место $x \models \rhd p$ и значит $w \models \Box\rhd p$.

2) Предположим теперь, что выполнен второй дизъюнктивный член формулы $(\varphi^{\rhd}_{4\flat})$. Надо доказать: $w \models \Box p \,\&\, \Diamond\neg\rhd p \to \Box\neg\rhd p$. Пусть $w \models \Box p \,\&\, \Diamond\neg\rhd p$, тогда $\exists x{\downarrow}w$: $x \not\models \rhd p$. Имеем: $Bra(x)$, ибо $\exists s, t{\downarrow}x$: $s \models p$, $t \not\models p$, причем $s \neq t$; кроме того $\neg(w{\uparrow}t)$, ибо $w \models \Box p$. Теперь берем любой $y{\downarrow}w$. Чтобы доказать $y \not\models \rhd p$, во-первых, заметим, что $t \in (x{\uparrow} \setminus w{\uparrow}) = (y{\uparrow} \setminus w{\uparrow})$, в частности, $y{\uparrow}t$, и значит $y \models \Diamond\neg p$. Во-вторых, рассмотрим два случая:

а) $w{\uparrow}s$. Тогда $x{\uparrow} \cap w{\uparrow}$, откуда $y{\uparrow} \cap w{\uparrow}$ по $(\varphi^{\rhd}_{4\flat})$, и значит $y \models \Diamond p$.

б) $\neg(w{\uparrow}s)$. Тогда $s \in (x{\uparrow} \setminus w{\uparrow}) = (y{\uparrow} \setminus w{\uparrow})$ (равенство верно в силу $(\varphi^{\rhd}_{4\flat})$), откуда $y{\uparrow}s$ и $y \models \Diamond p$.

<u>$\mathfrak{S} = \mathbf{5}.$</u>

$(\Rightarrow)$ Допустим, $F \overset{1}{\not\models} (\varphi^{\rhd}_{5})$, т. е. $\widehat{\exists} w\ \exists x, y{\downarrow}w$: $\neg(x{\uparrow}y)$. Из $Bra(w)$ следует, что $\exists z{\downarrow}w$: $z \neq x$ (возможно, $z = y$). Положим $!x \models q$, $!y \models p$. Тогда имеем: $w \models \neg\rhd p$, ибо $y \models p$ и по крайней мере одна из точек x, z отлична от y (обозначим ее t), так что $w{\uparrow}t$ и $t \not\models p$; $w \models \Diamond(q \to \neg\rhd p)$, ибо $z \not\models q$; $w \models \Diamond\neg(q \to \neg\rhd p)$, ибо $x \models q$, $x \models \rhd p$, даже $x \models \Box\neg p$ ввиду $\neg(x{\uparrow}y)$. Следовательно, $w \not\models (\mathsf{A}^{\rhd}_{5})$.

$(\Leftarrow)$ Пусть $w \models \neg\rhd p$, тогда $\exists x, y{\downarrow}w$: $x \models p$, $y \not\models p$. Мы докажем: $w \models \Box(q \to \neg\rhd p)$, и даже $w \models \Box\neg\rhd p$. Берем любой $z{\downarrow}w$. По $(\varphi^{\rhd}_{5})$ имеем: $z{\uparrow}x$, $z{\uparrow}y$, поэтому $z \models \Diamond p$ и $z \models \Diamond\neg p$. Значит, $z \models \neg\rhd p$.

<u>$\mathfrak{S} = \mathbf{5'}.$</u> Перепишем $(\mathsf{A}^{\rhd}_{5'})$ в эквивалентном виде (с заменой $\neg p$ на p):

$$\Diamond(p \,\&\, \rhd p) \to (\Box p \,\&\, \Box\rhd p).$$

$(\Rightarrow)$ Допустим, $F \overset{1}{\not\models} (\varphi^{\rhd}_{5'})$, т. е. $\widehat{\exists} w\ \exists x, y{\downarrow}w$: $\neg(x{\uparrow}y)$. Возможны два случая:

1) $x = y$. Положим $!x \models p$. Тогда $w \models \Diamond(p \,\&\, \rhd p)$, поскольку $x \models p$, а также $x \models \Box\neg p$ ввиду $\neg(x{\uparrow}x)$. Однако $w \not\models \Box p$, ибо из $Bra(w)$ вытекает

$\exists z{\downarrow}w$: $z \neq x$, так что $z \not\models p$.

2) $x \neq y$. Положим $!y \not\models p$. Тогда $x \models p$; $x \models \Box p$, ибо $\neg(x{\uparrow}y)$; значит $w \models \Diamond(p \,\&\, \triangleright p)$; однако $w \not\models \Box p$, ибо $w{\uparrow}y$ и $y \not\models p$.

($\Leftarrow$) Предположим $w \models \Diamond(p \,\&\, \triangleright p)$. Тогда $\exists x{\downarrow}w$: $x \models p$ и $x \models \triangleright p$. Из $(\varphi^{\triangleright}_{5'})$ вытекает $w{\uparrow} \subseteq x{\uparrow}$, что вместе с $w{\uparrow}x$ влечет $x{\uparrow}x$, а значит и $x \models \Box p$. Отсюда, во-первых, в силу $w{\uparrow} \subseteq x{\uparrow}$ следует $w \models \Box p$; а во-вторых, для любого $y{\downarrow}w$ имеем $y \models \triangleright p$ и даже $y \models \Box p$. Для доказательства последнего заметим сначала, что из $w{\uparrow}x$ и $w{\uparrow}y$ вытекает $y{\uparrow}x$. Далее возьмем произвольный $z{\downarrow}y$. Если $z = x$, то $z \models p$; если же $z \neq x$, то из $y{\uparrow}x$, $y{\uparrow}z$, а значит и $Bra(y)$ мы заключаем, по $(\varphi^{\triangleright}_{5'})$, что $x{\uparrow}z$, и следовательно $z \models p$.

<u>$\mathfrak{S} = \mathbf{5}\flat$.</u> Перепишем формулу $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{5\flat})$ в эквивалентном виде: $\Diamond\triangleright p \to \Box\triangleright p$.

($\Rightarrow$) Допустим, $F \not\models^{1} (\varphi^{\triangleright}_{5\flat})$, т. е. $\widehat{\exists} w\, \widehat{\exists} x_0{\downarrow}w$ и $\exists x, y{\downarrow}w$: $x{\uparrow} \neq y{\uparrow}$. Рассмотрим два случая:

1) Хотя бы одна из точек x, y функциональна; для определенности, пусть $Fnc(y)$. Поскольку $Bra(x_0)$, то $\exists s, t{\downarrow}x_0$: $s \neq t$. Положим $!s \models p$. Тогда $w \models \Diamond\triangleright p$, ибо $y \models \triangleright p$ ввиду $Fnc(y)$; $w \models \Diamond\neg\triangleright p$, ибо $x_0 \not\models \triangleright p$ ввиду $s \models p$ и $t \not\models p$. Итак, $w \not\models \triangleright\triangleright p$.

2) Обе точки x и y ветвящиеся. Ввиду $x{\uparrow} \neq y{\uparrow}$ и симметричности ситуации относительно x и y, можно считать, что $\exists s{\downarrow}x$: $\neg(y{\uparrow}s)$. Положим $!s \models p$. Тогда $w \models \Diamond\triangleright p$, ибо $y \models \triangleright p$ и даже $y \models \Box p$ ввиду $\neg(y{\uparrow}s)$; $w \models \Diamond\neg\triangleright p$, ибо $x \not\models \triangleright p$, поскольку, с одной стороны, $s \models p$, а с другой, $Bra(x)$, и значит $\exists t{\downarrow}x$: $t \neq s$, и следовательно, $t \not\models p$. Опять $w \not\models \triangleright\triangleright p$.

($\Leftarrow$) Рассмотрим два случая:

1) $\forall x{\downarrow}w\ Fnc(x)$. Тогда $\forall x{\downarrow}w\ x \models \triangleright p$, поэтому $w \models \Box\triangleright p$ и значит, $w \models (\mathsf{A}^{\triangleright}_{5a})$.

2) $\widehat{\exists} x{\downarrow}w$. Пусть $w \models \Diamond\triangleright p$, т. е. $\exists x{\downarrow}w$: $x \models \triangleright p$. Возьмем любой $y{\downarrow}w$; тогда $x{\uparrow} = y{\uparrow}$ по $(\varphi^{\triangleright}_{5\flat})$, откуда $y \models \triangleright p$. Следовательно, $w \models \Diamond\triangleright p \to \Box\triangleright p$.

Теорема полностью доказана. $\dashv$

Следствие 5.2.2. *Справедливы следующие строгие включения классов шкал. Все остальные включения между этими классами вытекают из указанных на диаграмме.*

$$\begin{array}{ccccc}
\mathfrak{Tran} & \subset & \mathcal{F}(\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{4}}) & \subset & \mathcal{F}(\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{4}\flat}) \\
 & & \cup & & \cup \\
 & & \mathfrak{Func} & & \mathcal{F}(\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{5}\flat}) \\
 & & \cap & & \cup \\
\mathfrak{Eucl} & \subset & \mathcal{F}(\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{5}}) & = & \mathcal{F}(\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{5'}})
\end{array}$$

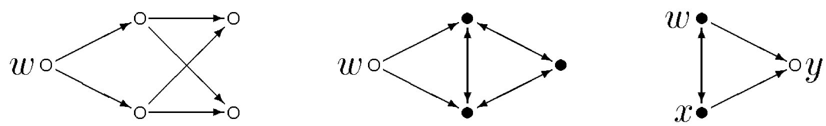
Доказательство. Включение $\mathfrak{Func} \subseteq \mathcal{F}(A)$ для любой $\rhd$-формулы A было установлено в теореме 5.1.4. Из теоремы 2.1.2 о полноте вытекают включения $\mathfrak{Tran} \subseteq \mathcal{F}(\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{4}})$ и $\mathfrak{Eucl} \subseteq \mathcal{F}(\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{5}})$. Так как подстановка $q := \top$ в аксиому $(\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{4}})$ дает формулу, эквивалентную $(\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{4}\flat})$ в логике $\mathbf{K}^{\rhd}$, имеем: $\mathcal{F}(\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{4}}) \subseteq \mathcal{F}(\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{4}\flat})$. Включение $\mathcal{F}(\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{5}\flat}) \subseteq \mathcal{F}(\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{4}\flat})$ тривиально, покуда $(\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{5}\flat})$ является заключением импликации в $(\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{4}\flat})$. Равенство $\mathcal{F}(\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{5}}) = \mathcal{F}(\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{5'}})$ установлено в теореме 5.2.1.

Покажем, что $\mathcal{F}(\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{5}}) \subseteq \mathcal{F}(\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{5}\flat})$. Предположим, что $F \overset{1}{\models} (\varphi^{\rhd}_{\mathbf{5}})$, т. е. любые две точки, достижимые из произвольной ветвящейся точки, “видят” друг друга (равно как и самих себя). Мы покажем, что даже $\widehat{\forall} w\ \forall x, y{\downarrow}w\ (x{\uparrow} = y{\uparrow})$. Возьмем произвольную ветвящуюся точку w шкалы F и любые $x, y{\downarrow}w$, тогда $x{\uparrow}y$ и $y{\uparrow}y$. Для доказательства включения $x{\uparrow} \subseteq y{\uparrow}$ возьмем любую $z{\downarrow}x$. Если $z = y$, то, очевидно, $y{\uparrow}z$. Если же $z \neq y$, то из $x{\uparrow}y$ и $x{\uparrow}z$ получаем $Bra(x)$ и по $(\varphi^{\rhd}_{\mathbf{5}})$ имеем $y{\uparrow}z$. Обратное включение доказывается аналогично.

Включения классов $\mathfrak{Func}$, $\mathfrak{Tran}$, и $\mathfrak{Eucl}$ в ближайшие к ним классы на диаграмме являются строгими, поскольку данные три класса несравнимы по включению. Включение $\mathcal{F}(\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{5}\flat}) \subset \mathcal{F}(\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{4}\flat})$ строгое, ибо по лемме 4.4.5 следующее включение логик является строгим:

$$\mathbf{T}^{\rhd} + (\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{4}\flat}) = \mathbf{S4}^{\rhd} \subset \mathbf{S5}^{\rhd} = \mathbf{T}^{\rhd} + (\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{5}\flat}).$$

Включения $\mathcal{F}(\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{4}}) \subset \mathcal{F}(\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{4}\flat})$ и $\mathcal{F}(\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{5}}) \subset \mathcal{F}(\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{5}\flat})$ являются строгими, покуда на шкале $\mathcal{X}$ (см. рис. 5.1) общезначимы $(\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{5}\flat})$ и $(\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{4}\flat})$, но опровергаются $(\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{4}})$ и $(\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{5}})$ в точке w. (Рефлексивные и иррефлексивные точки изображены посредством $\bullet$ и $\circ$ соответственно.)



Шкала $\mathcal{X}$ Шкала $\mathcal{Y}$ Шкала $\mathcal{Z}$

Рис. 5.1. Три шкалы.

Наконец, никакое включение, не следующее из нашей диаграммы, не имеет места. Для доказательства этого достаточно опровергнуть включения $\mathfrak{Eucl} \subseteq \mathcal{F}(\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{4}})$ и $\mathfrak{Tran} \subseteq \mathcal{F}(\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{5}\flat})$. На рис. 5.1 евклидова шкала $\mathcal{Y}$ опровергает формулу $(\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{4}})$ в точке w, а транзитивная шкала $\mathcal{Z}$ опровергает формулу $(\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{5}\flat})$ в точке w. $\dashv$

Отметим, что если модифицировать шкалу $\mathcal{Z}$, сделав точку w иррефлексивной, а точку y рефлексивной, то получится шкала, обладающая, как показано в работе [13], следующим интересным свойством: ее $\Box$-логика, $\mathbf{H} = \mathcal{L}^{\Box}(\mathcal{Z})$, отлична от $\mathbf{Ver}$, не содержит логику $\mathbf{T}$, но в $\mathbf{H}$ оператор необходимости является $\rhd$-выразимым посредством равенства $\Box A = [\rhd A \,\&\, (A \leftrightarrow \rhd\rhd A)]$.

Как показывает следствие 5.2.2, аксиомы $(\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{4}})$ и $(\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{4}\flat})$ (соотв. $(\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{5}})$, $(\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{5}\flat})$ и $(\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{5}'})$) не соответствуют в точности классам транзитивных (соотв. евклидовых) шкал. Однако, в качестве следствия теоремы 4.3.1 мы получим соответствие этих и некоторых других $\rhd$-аксиом, встречавшихся в разделах 2.1, 3.1, 4.1 свойствам *рефлексивных* (либо *рефлексивных транзитивных*) шкал. Данный факт может служить объяснением названий, которые мы дали данным аксиомам.

Теорема 5.2.3.

(1) *В классе рефлексивных шкал:*

(а) *аксиома* $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{B}})$ *выражает свойство симметричности;*

(б) *каждая из аксиом* $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{4}})$, $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{4}\flat})$ *выражает транзитивность;*

(в) *каждая из аксиом* $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{5}})$, $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{5}\flat})$ *и* $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{5'}})$ *выражает евклидовость.*

(2) *В классе рефлексивных транзитивных шкал:*

(г) *аксиома* $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{G}})$ *выражает слабую обратную фундированность;*

(д) *аксиома* $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{1}})$ *выражает свойство Маккинси.*

Доказательство. Для аксиом $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{B}})$, $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{4}\flat})$, $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{5}\flat})$, $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{5'}})$, $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{G}})$ и $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{1}})$ утверждение непосредственно вытекает из полноты аксиоматик логик $\mathbf{B}^{\triangleright}$, $\mathbf{S4}^{\triangleright}$, $\mathbf{S5}^{\triangleright}$, $\mathbf{Grz}^{\triangleright}$ и $\mathbf{S4.1}^{\triangleright}$, доказанной в теореме 4.3.1 и следствии 4.4.3. Проведем рассуждения, например, для $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{4}\flat})$. Возьмем произвольную рефлексивную шкалу F.

Если F транзитивна, то $F \models \mathbf{S4}$ и $F \models \mathbf{S4}^{\triangleright}$, откуда $F \models (\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{4}\flat})$. Обратно, прусть $F \models (\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{4}\flat})$. Поскольку F рефлексивна, $F \models \mathbf{T}^{\triangleright}$, и следовательно, $F \models \mathbf{S4}^{\triangleright}$. Ввиду полноты аксиоматики $\mathbf{S4}^{\triangleright}$ (т. е. включения $\mathbf{S4} \subseteq (\mathbf{S4}^{\triangleright})^{\boxdot}$, см. лемму 4.4.2), из выводимости $\mathbf{S4} \vdash (\mathsf{A}^{\Box}_{\mathbf{4}})$ следует выводимость $\mathbf{S4}^{\triangleright} \vdash \mathsf{Tr}(\mathsf{A}^{\Box}_{\mathbf{4}})$, отсюда $F \models \mathsf{Tr}(\mathsf{A}^{\Box}_{\mathbf{4}})$ и, наконец, в силу рефлексивности F заключаем: $F \models (\mathsf{A}^{\Box}_{\mathbf{4}})$, что и означает транзитивность F.

Для аксиомы $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{5}})$ утверждение вытекает из ее эквивалентности (на любой шкале) аксиоме $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{5'}})$, установленной в теореме 5.2.1. Для $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{4}})$ имеем следующее: с одной стороны, в силу следствия 5.2.2 аксиома $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{4}})$ сильнее аксиомы $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{4}\flat})$; с другой, $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{4}})$ не является "очень сильной": она принадлежит логике $\mathbf{K4}^{\triangleright} \subset \mathbf{S4}^{\triangleright}$. Следовательно, для $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{4}})$ справедливы рассуждения, проведенные для $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{4}\flat})$ выше. $\dashv$

В заключение — несколько замечаний об аксиоматических системах, представленных а разделах 2.1 и 4.1. Согласно следствию 5.2.2, аксиома $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{4}})$ строго сильнее, чем $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{4}\flat})$. Следовательно, $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{4}\flat})$ можно заменить на $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{4}})$ в аксиоматике логики $\mathbf{S4}^{\triangleright}$. В статье [17] было высказано предположение, что логику $\mathbf{K4}^{\triangleright}$ можно аксиоматизировать, используя вместо $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{4}})$

более простую аксиому $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{4\flat})$. Однако, эта гипотеза была опровергнута Куном [18], который предъявил шкалу $\mathcal{X}$ (см. рис. 5.1), разделяющую эти аксиомы.

Полученные нами результаты позволяют заключить, что по тем же причинам в формулировке исчисления $\mathbf{K5}^{\triangleright}$ аксиому $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{5})$ нельзя заменить на $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{5\flat})$. Тем не менее, аксиома $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{5'})$, равно как и $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{5\flat})$, может быть заменена на $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{5})$, поскольку эти две аксиомы общезначимы на любой евклидовой шкале по следствию 5.2.2, и следовательно, выводимы в $\mathbf{K5}^{\triangleright}$. Вопрос о том, можно ли заменить аксиому $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{5})$ в исчислении $\mathbf{K5}^{\triangleright}$ аксиомой $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{5'})$ (общезначимой на тех же шкалах!), остается нерешенным.

5.3. Инфинитарный оператор $\boxtimes$

При доказательстве теоремы 2.1.2 мы ввели оператор $\boxtimes$, игравший примерно ту же роль в конструкции канонической модели, какую в случае нормальных логик играет оператор $\Box$. В этом разделе будет показано, что в логиках **K**, **K4**, **K5**, **K45**, **GL** оператор $\boxtimes$ подчиняется тем же модальным законам, что и оператор $\Box$ (быть может, и еще каким-то). Сначала дадим необходимые определения.

Определение 5.3.1. *Инфинитарный модальный* $\triangleright$*-язык* содержит счетное множество переменных $\mathrm{Var} = \{p_0, p_1, \ldots\}$, булевы связки $\neg$ (отрицание), $\bigwedge$ (инфинитарная конъюнкция) и одноместный модальный оператор $\triangleright$. Множество формул этого языка, которое мы обозначим $\mathbf{Fm}^{\triangleright}_{\infty}$, задается следующими правилами: каждая переменная p_i является формулой; если A — формула, то $\neg A$ и $\triangleright A$ — формулы; если Φ — не более чем счетное множество формул, то $\bigwedge \Phi$ — формула. Остальные связки вводятся известными сокращениями, в частности, $(A \to B) \leftrightharpoons \neg \bigwedge\{A, \neg B\}$. Тем самым множество формул $\mathbf{Fm}^{\triangleright}$ можно естественно вложить в $\mathbf{Fm}^{\triangleright}_{\infty}$. Семантика Крипке для языка $\mathbf{Fm}^{\triangleright}_{\infty}$ определяется очевидным образом.

Далее введем в рассмотрение язык $\mathbf{Fm}^{\boxtimes}$, отличающийся от $\mathbf{Fm}^{\Box}$ лишь заменой символа $\Box$ на $\boxtimes$. Наконец, задаем перевод формул $(\cdot)_{\boxtimes}\colon \mathbf{Fm}^{\boxtimes} \to \mathbf{Fm}^{\rhd}_{\infty}$, коммутирующий с булевыми связками и имеющий следующий индуктивный пункт определения:

$$(\boxtimes A)_{\boxtimes} = \bigwedge_{B \in \mathbf{Fm}^{\rhd}} \rhd(B \to A_{\boxtimes}).$$

Данный перевод позволяет ввести семантику Крипке для $\boxtimes$-языка: $F \models A \risingdotseq F \models A_{\boxtimes}$ для любой $A \in \mathbf{Fm}^{\boxtimes}$. В дальнейшем мы будем писать „неоднородные“ формулы, в которых могут встречаться модальности $\Box$, $\rhd$ и $\boxtimes$; семантику таких формул можно определить очевидным образом.

Легко видеть, что общезначима импликация $\models \Box p \to \boxtimes p$, в виду чего мы будем $\boxtimes$ называть оператором *слабой* необходимости. Для обратной импликации это неверно, поскольку, например, если из точки w достижима ровно одна точка, то $w \models \rhd A$ для любой формулы A и тем самым $w \models \boxtimes p$, в то время как условие $w \models \Box p$ вовсе не обязано выполняться. Очевидна также импликация $\models \boxtimes p \to \rhd p$.

Теперь, если L — некоторая $\Box$-логика, то *логикой оператора* $\boxtimes$ *над* L (или, кратко, $\boxtimes$-*логикой* над L) назовем множество $\boxtimes$-формул, общезначимых на любой L-шкале:

$$L^{\boxtimes} \risingdotseq \{A \in \mathbf{Fm}^{\boxtimes} \mid \ \forall F\ (F \models L \Rightarrow F \models A)\}.$$

Одна из основных наших целей в этом разделе — выяснить, насколько логика оператора $\boxtimes$ похожа на логику исходного оператора $\Box$. Для упрощения формулировок мы будем понимать равенства (а также включения) вида $L^{\boxtimes} = L$ с точностью до замены $\Box$ на $\boxtimes$.

Теорема 5.3.2. *Если L — нормальная логика, то $L^{\boxtimes}$ тоже нормальна.*

Доказательство. Поскольку замкнутость логики $L^{\boxtimes}$ относительно правил вывода исчисления $\mathbf{K}$ очевидна, необходимо лишь проверить общезначимость формулы $\boxtimes(p \to q) \to (\boxtimes p \to \boxtimes q)$. Допустим противное, т. е.

существует модель M и точка w в ней, такие что

$$w \models \boxtimes(p \to q), \qquad w \models \boxtimes p, \qquad w \not\models \boxtimes q.$$

Последнее означает $w \not\models \triangleright(A \to q)$ для некоторой $\triangleright$-формулы A, т. е.

$$\begin{array}{ll} \exists x{\downarrow}w & x \models A \to q, \\ \exists y{\downarrow}w & y \models A, \neg q. \end{array}$$

Ввиду наших предположений имеем: $w \models \triangleright(p \to q), \triangleright p$. Отсюда по лемме 2.1.1 следует $w \models \triangleright[(p \to q) \,\&\, p]$, что равносильно $w \models \triangleright(p \,\&\, q)$. Но случай $w \models \Box(p \,\&\, q)$ невозможен ввиду того, что $y \not\models p \,\&\, q$, значит имеет место случай $w \models \Box(\neg p \vee \neg q)$. Далее мы разберем два возможных варианта.

1) $x \models q$. Тогда $x \not\models p$, поскольку $x \models (\neg p \vee \neg q)$ по доказанному выше. Но ввиду $w \models \triangleright p$ заключаем: $y \not\models p$. Мы пришли к противоречию: с одной стороны, $w \models \triangleright(q \to p)$, что следует из предположения $w \models \boxtimes p$; а с другой, $x \not\models q \to p$ и $y \models q \to p$.

2) $x \not\models q$. Тогда $x \not\models A$, поскольку $x \models A \to q$. Ввиду $w \models \triangleright p$ имеет место одна из следующих ситуаций:

2а) $x \models p$ и $y \models p$. Тогда из $w \models \triangleright[A \to (p \to q)]$ заключаем:

- либо $w \models \Box[A \to (p \to q)]$, что не так, ибо $y \models A, p, \neg q$;
- либо $w \models \Box\neg[A \to (p \to q)]$, и тогда $w \models \Box A$, что не так: $x \not\models A$.

2б) $x \not\models p$ и $y \not\models p$. Тогда из $w \models \triangleright[A \to p]$ заключаем:

- либо $w \models \Box[A \to p]$, что не так, ибо $y \models A, \neg p$;
- либо $w \models \Box\neg[A \to p]$, и тогда $w \models \Box A$, что не так: $x \not\models A$.

Тем самым наше предположение неверно, и теорема доказана. $\dashv$

Лемма 5.3.3. *Для* $L \in \{\mathbf{K}, \mathbf{K4}, \mathbf{K5}, \mathbf{K45}, \mathbf{GL}\}$ *верны включения* $L^{\boxtimes} \supseteq L$.

Доказательство. Для $L = \mathbf{K}$ утверждение доказано в лемме 5.3.2.

$\underline{L = \mathbf{K4}}$. Проверим общезначимость формулы $\boxtimes p \to \boxtimes\boxtimes p$ на любой транзитивной шкале. Допустим, в некоторой точке w некоторой транзитивной модели имеет место $w \models \boxtimes p$ и $w \not\models \boxtimes\boxtimes p$. Второе означает, что существует такая $\rhd$-формула A, что $w \not\models \rhd(A \to \boxtimes p)$, т. е.

$$\exists x{\downarrow}w \qquad x \models A \to \boxtimes p,$$
$$\exists y{\downarrow}w \qquad y \models A, \neg\boxtimes p.$$

Последнее, в свою очередь, влечет существование такой $\rhd$-формулы B, что

$$\exists s{\downarrow}y \qquad s \models B \to p,$$
$$\exists t{\downarrow}y \qquad t \not\models B \to p.$$

Ввиду транзитивности имеем $w{\uparrow}s$, $w{\uparrow}t$, и мы заключаем, что $w \not\models \rhd(B \to p)$, в противоречие с условием $w \models \boxtimes p$.

<u>$L = \mathbf{K5}$.</u> Покажем, что в любой точке w произвольной евклидовой модели истинна формула $\neg\boxtimes p \to \boxtimes\neg\boxtimes p$. Пусть $w \models \neg\boxtimes p$, т. е. $w \models \neg\rhd(A \to p)$ для некоторой $\rhd$-формулы A. По аксиоме $(\mathsf{A}_{\mathbf{5}}^{\rhd})$ (истинной в точке w) заключаем, что $w \models \rhd[B \to \neg\rhd(A \to p)]$ для любой $\rhd$-формулы B, т. е. $w \models \boxtimes\neg\rhd(A \to p)$. Наконец, ввиду очевидной общезначимости импликации $\neg\rhd(A \to p) \to \neg\boxtimes p$, с помощью принципа монотонности, справедливого для $\boxtimes$ согласно лемме 5.3.2, получаем общезначимую формулу $\boxtimes\neg\rhd(A \to p) \to \boxtimes\neg\boxtimes p$, откуда $w \models \boxtimes\neg\boxtimes p$.

<u>$L = \mathbf{GL}$.</u> Допустим, что в точке w некоторой транзитивной обратно фундированной модели имеет место $w \not\models \boxtimes(\boxtimes p \to p) \to \boxtimes p$, что равносильно

$$w \models \boxtimes(\boxtimes p \to p), \qquad w \not\models \boxtimes p.$$

Второе условие означает $w \not\models \rhd(A \to p)$ для некоторой $\rhd$-формулы A, т. е.

$$\exists x{\downarrow}w \qquad x \models A \to p, \tag{5.1}$$
$$\exists y{\downarrow}w \qquad y \models A, \neg p. \tag{5.2}$$

Первое же условие влечет:

$$w \models \rhd(\boxtimes p \to p), \tag{5.3}$$
$$w \models \rhd[\neg A \to (\boxtimes p \to p)]. \tag{5.4}$$

Ввиду того, что $y \models A$, имеем: $y \models \neg A \to (\boxtimes p \to p)$, что вместе с (5.4) дает

$$w \models \Box(A \vee \neg\boxtimes p \vee p). \tag{5.5}$$

Далее рассмотрим два случая.

1) $x \not\models p$. Тогда $x \not\models A$ в силу (5.1) и значит $x \not\models \boxtimes p$ ввиду (5.5).

2) $x \models p$. Тогда $x \models \boxtimes p \to p$, что вместе с (5.3) влечет $w \models \Box(\boxtimes p \to p)$, и следовательно, $y \models \boxtimes p \to p$, а так как $y \not\models p$, то $y \not\models \boxtimes p$.

В любом случае существует такая точка $z{\downarrow}w$, что $z \not\models \boxtimes p$. Кроме того, поскольку тогда и $z \models \boxtimes p \to p$, в силу (5.3) заключаем $w \models \Box(\boxtimes p \to p)$. Рассматриваемая шкала транзитивна, поэтому $w \models \Box\Box(\boxtimes p \to p)$, следовательно, $z \models \Box(\boxtimes p \to p)$ и, наконец, $z \models \boxtimes(\boxtimes p \to p)$.

Итак, мы построили такую точку $z{\downarrow}w$, что $z \not\models \boxtimes(\boxtimes p \to p) \to \boxtimes p$. Повторяя проведенные рассуждения, можно построить бесконечную возрастающую цепь с началом в точке w, в противоречие с обратной фундированностью рассматриваемой шкалы. $\dashv$

Замечание 5.3.4. Для логики $L = \mathbf{KB} = \mathbf{K} + (\mathsf{A}^{\Box}_{\mathbf{B}})$ утверждение леммы 5.3.3 неверно.

Доказательство.

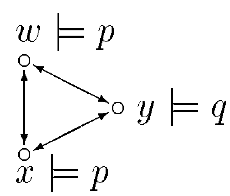


Рис. 5.2. Симметричная модель: $w \not\models p \to \boxtimes\neg\boxtimes\neg p$.

На рис. 5.2 показана симметричная модель (с указанием оценки переменных; посредством $\circ$ изображены иррефлексивные точки), опровергающая формулу $p \to \boxtimes\neg\boxtimes\neg p$ в точке w. Действительно, $w \models p$, но $w \not\models \rhd(q \to \neg\boxtimes\neg p)$, поскольку, с одной стороны, $x \models q \to \neg\boxtimes\neg p$ ввиду

$x \not\models q$, а с другой, $y \not\models q \to \neg\boxtimes\neg p$. Докажем последнее. Во-первых, $y \models q$. Во-вторых, $y \models \boxtimes\neg p$, ибо даже $y \models \rhd A$ для любой формулы A. В самом деле, точки w и x данной модели изоморфны (т. е. порожденные ими подмодели изоморфны), значит в них истинны одни и те же формулы, а поскольку лишь эти две точки достижимы из y, то для любой формулы A либо $y \models \Box A$, либо $y \models \Box\neg A$. $\dashv$

Легко видеть, что для справедливости всех проведенных выше рассуждений достаточно было в определении оператора $\boxtimes$ брать инфинитарную конъюнкцию лишь по множеству *литер* $\mathrm{L} := \{p, \neg p \mid p \in \mathrm{Var}\}$. Такое определение оператора $\boxtimes$ более удобно нам и в дальнейшем, поэтому *до конца этой работы будем считать, что* $\boxtimes$ *определен именно таким образом.* Записывая новое определение достаточно условно, полагаем:

$$\boxtimes A := \bigwedge_{\ell \in \mathrm{L}} \rhd(\ell \to A)$$

(формально, здесь нужно задать перевод $\mathbf{Fm}^{\boxtimes} \to \mathbf{Fm}^{\rhd}_{\infty}$, аналогичный описанному в начале данного параграфа).

Аналогично тому, как исходя из оператора $\Box$ через посредство оператора $\rhd$ был построен инфинитарный оператор $\boxtimes$, мы можем, исходя из оператора $\boxtimes$ построить новый оператор $\boxplus$:

$$\blacktriangleright A := \boxtimes A \vee \boxtimes\neg A; \qquad \boxplus A := \bigwedge_{\ell \in \mathrm{L}} \blacktriangleright(\ell \to A).$$

Оказывается, что эта итерация конструкции построения инфинитарного оператора не дает ничего нового, как показывает следующая лемма.

Лемма 5.3.5. *Операторы $\boxtimes$ и $\boxplus$ семантически эквивалентны, т. е. формула $\boxtimes p \leftrightarrow \boxplus p$ общезначима. Более того, $\models \rhd p \leftrightarrow \blacktriangleright p$.*

Доказательство. Импликация '$\to$' очевидна ввиду $\models \Box p \to \boxtimes p$. Поскольку $\models \boxtimes p \to \rhd p$, обратная импликация вытекает из следующей цепочки: $\models \blacktriangleright p \longleftrightarrow (\boxtimes p \vee \boxtimes\neg p) \longrightarrow (\rhd p \vee \rhd\neg p) \longleftrightarrow \rhd p$. $\dashv$

Обозначим через $L_\infty^\Box$ и $L_\infty^\boxtimes$ инфинитарные логики операторов $\Box$ и $\boxtimes$ над логикой L, т. е. множества инфинитарных $\Box$- и $\boxtimes$-формул (определение которых дается аналогично определению 5.3.1), общезначимых на всех L-шкалах: $L_\infty^\Box := \{A \in \mathbf{Fm}_\infty^\Box \mid \forall F(F \models L \Rightarrow F \models A)\}$ и аналогично для $\boxtimes$. Эти логики, вообще говоря, различны: логика $\mathbf{K}_\infty^\boxtimes$ содержит формулу

$$\boxtimes p \leftrightarrow \bigwedge_{\ell \in \mathrm{L}} [\boxtimes(\ell \to p) \vee \boxtimes\neg(\ell \to p)],$$

что следует из леммы 5.3.5, в то время как $\mathbf{K}_\infty^\Box$ не содержит аналогичной формулы (с заменой $\boxtimes$ на $\Box$).

Итак, модальность $\boxtimes$ слабее, чем $\Box$, в смысле общезначимости $\models \Box p \to \boxtimes p$, является модальностью необходимости (т. е. подчиняется законам нормальной логики) и оператор разрешимости выражается через нее посредством эквивалентности $\rhd p \leftrightarrow (\boxtimes p \vee \boxtimes\neg p)$. Справедливо даже больше: $\boxtimes$ является самой слабой модальностью[2] необходимости, через которую оператор разрешимости выражается таким образом. Действительно, пусть $\boxplus$ — нормальный оператор и $\models \rhd p \leftrightarrow (\boxplus p \vee \boxplus\neg p)$. Для доказательства того, что $\models \boxplus p \to \boxtimes p$, возьмем произвольную литеру ℓ. Из $\models (\boxplus A \vee \boxplus\neg A) \to \rhd A$ заключаем, что $\models \boxplus A \to \rhd A$. Применяя это к формуле $A = (\ell \to p)$ и используя нормальность оператора $\boxplus$, получаем: $\models \boxplus p \to \boxplus(\ell \to p) \to \rhd(\ell \to p)$, откуда вытекает требуемое: $\models \boxplus p \to \boxtimes p$.

Как вытекает из леммы 5.3.5, логика $\mathbf{K}^\boxtimes$ замкнута относительно инфинитарного правила вывода $\boxplus A \vdash \boxtimes A$. Установим (в качестве косвенного подтверждения гипотезы $\mathbf{K}^\boxtimes = \mathbf{K}$), что логика $\mathbf{K}$ замкнута относительно правила $\boxtimes A \vdash \Box A$. Мы докажем более сильный факт.

Лемма 5.3.6. *Логика* $\mathbf{K}$ *замкнута относительно правила вывода*

$$(\mathfrak{Z}^\Box) \qquad \frac{\rhd(\mathfrak{z} \to A) \quad \rhd(\neg\mathfrak{z} \to A)}{\Box A},$$

[2]Под модальностью здесь можно понимать любой одноместный модальный оператор, для которого задана сементика Крипке. Это, конечно, не есть формальное определение модальности. Для наших целей под модальностью можно понимать произвольную формулу (финитарную или инфинитарную) $\boxplus p$ с выделенной переменной p.

где $\mathfrak{z}$ *— произвольная переменная.*

Доказательство. Предположим, что посылки данного правила общезначимы на любой шкале, и докажем общезначимость формулы $\Box A$. Возьмем произвольную шкалу $F = \langle W, \uparrow \rangle$, точку $w \in W$ и оценку $\models$ на W. Для доказательства того, что $w \models \Box A$, дополним эту шкалу двумя новыми точками: $\widehat{W} := W \sqcup \{x, y\}$, $\Uparrow = \uparrow \cup \{\langle w, x\rangle, \langle w, y\rangle\}$; распространим на них оценку переменных: $x \models' \mathfrak{z}$, $y \not\models' \mathfrak{z}$.

По предположению имеем: $w \models' \rhd(\mathfrak{z} \to A)$; однако случай $w \models' \Box\neg(\mathfrak{z} \to A)$ невозможен, ибо иначе $w \models' \Box\mathfrak{z}$, что неверно; значит, $w \models' \Box(\mathfrak{z} \to A)$. Аналогично, $w \models' \Box(\neg\mathfrak{z} \to A)$. Наконец, ввиду выводимости

$$\mathbf{K} \vdash \Box(\mathfrak{z} \to A) \mathbin{\&} \Box(\neg\mathfrak{z} \to A) \longrightarrow \Box A$$

заключаем $w \models' \Box A$ и следовательно $w \models \Box A$. $\dashv$

Доказанная лемма дает основание предположить, что оператор $\boxtimes$ можно (без изменения его логики над $\mathbf{K}$) определять как $\boxtimes A = \rhd(\mathfrak{z} \to A) \mathbin{\&} \rhd(\neg\mathfrak{z} \to A)$, взяв в качестве $\mathfrak{z}$ произвольную фиксированную переменную. Однако легко видеть, что такой оператор уже не будет нормальным. На рис. 5.3 приведена модель (с указанием оценки переменных), опровергающая формулу $\boxtimes\bot \to \boxtimes p$ при данном определении оператора $\boxtimes$ (переменные $\mathfrak{z}, p$ различны). Как показывает следующая лемма, в конъюнкции из

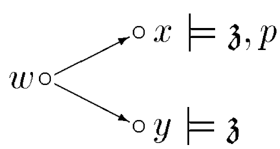


Рис. 5.3. $w \not\models \boxtimes\bot \to \boxtimes p$, где $\boxtimes A \leftrightharpoons \rhd(\mathfrak{z} \to A) \mathbin{\&} \rhd(\neg\mathfrak{z} \to A)$.

определения оператора $\boxtimes$ нельзя обойтись никаким конечным (фиксированным) множеством литер.

Лемма 5.3.7. *Оператор* $\boxtimes'$, *заданный равенством*

$$\boxtimes' A = \bigwedge_{i=1}^{m} \rhd(p_i \to A) \mathbin{\&} \bigwedge_{j=1}^{n} \rhd(\neg q_j \to A) \mathbin{\&} \bigwedge_{k=1}^{\ell} [\rhd(r_k \to A) \mathbin{\&} \rhd(\neg r_k \to A)],$$

(где списки переменных $\vec{p}$, $\vec{q}$ *и* $\vec{r}$ *не пересекаются), не является нормальным; а именно, формула* $\boxtimes'\bot \to \boxtimes' p$ *не является общезначимой.*

Доказательство. Возьмем переменную p, не входящую в эти списки $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{r}$. Рассмотрим шкалу, представленную выше, и зададим на ней оценку переменных следующим образом:

- $x \models p$, $y \not\models p$;
- если $m > 0$, то все p_i истинны в точках x и y;
- если $n > 0$, то все q_j ложны в точках x и y;
- если $\ell > 0$, то все r_k, например, истинны в точках x и y.

Тогда $w \not\models \boxtimes\bot \to \boxtimes p$. В самом деле, ввиду $w \models \rhd p_i$, $w \models \rhd q_j$ и $w \models \rhd r_k$ имеем $w \models \rhd\bot$. Однако:

- если $m > 0$, то $x \models p_1 \to p$, $y \not\models p_1 \to p$, откуда $w \not\models \rhd(p_1 \to p)$;
- если $n > 0$, то $x \models \neg q_1 \to p$, $y \not\models \neg q_1 \to p$, откуда $w \not\models \rhd(\neg q_1 \to p)$;
- если $\ell > 0$, то $x \models r_1 \to p$, $y \not\models r_1 \to p$, откуда $w \not\models \rhd(r_1 \to p)$. ⊣

Следствие 5.3.8. *Логика* $\mathbf{K}^{\boxtimes}$ *замкнута относительно правила*

$$(\mathfrak{Z}^{\boxtimes}) \quad \frac{\blacktriangleright(\mathfrak{z} \to A) \quad \blacktriangleright(\neg\mathfrak{z} \to A)}{\boxtimes A}.$$

Доказательство. Пусть посылки правила $(\mathfrak{Z}^{\boxtimes})$ принадлежат логике $\mathbf{K}^{\boxtimes}$, т. е. они общезначимы на любой шкале. Тогда по лемме 5.3.5 общезначимы формулы $\rhd(\mathfrak{z} \to A)$ и $\rhd(\neg\mathfrak{z} \to A)$. Как в лемме 5.3.6, отсюда следует, что общезначима формула $\Box A$, а значит и $\boxtimes A$. ⊣

В рамках общепринятого в логике подхода, понятие α называется *определимым* (или *выразимым*) через понятие β, если существует такое выражение $A = A(\beta)$, содержащее β, что A равно (или равносильно, в каком-то определенном смысле) понятию α. В контексте нашей работы, оператор разрешимости $\rhd$ выразим, по своему определению, через оператор необходимости $\Box$ равенством (эквивалентностью) $\rhd p = (\Box p \vee \Box\neg p)$. Возникает интересный вопрос: выразим ли оператор $\Box$ через $\rhd$? С точки зрения традиционного подхода это означает: существует ли такая $\rhd$-формула $\varphi(p)$, что эквивалентность $\Box p \leftrightarrow \varphi(p)$ общезначима на любой шкале? И ответ на него, очевидно, отрицательный (поскольку, например, $\rhd$-язык менее выразителен, чем $\Box$-язык).

Однако, по мнению автора, этот подход несколько ограничен, и более уместным в определении термина "выразимости" будет сказать, что "A ведет себя подобно α", или "A подчиняется тем же законам, что и α". Этот подход, как мы видели выше, позволяет дать новый, уже положительный, ответ на вопрос о выразимости $\Box$ через $\rhd$. А именно, в терминах $\rhd$ был построен оператор $\boxtimes$, подчиняющийся законам некоторой нормальной логики.

Было бы интересно найти логику инфинитарного оператора $\boxtimes$ над логиками $\mathbf{K}$, $\mathbf{K4}$, $\mathbf{K5}$, $\mathbf{GL}$ и другими. На первый взгляд, эта задача стоит в стороне от вопросов исследования логик разрешимости; однако, она имеет философский аспект. Если, например, окажется, что $\mathbf{K}^{\boxtimes} = \mathbf{K}$, то данный результат будет означать, что, вопреки распространенному мнению (см., например, [17, 19]), оператор необходимости $\Box$ выражается через оператор разрешимости $\rhd$, хотя и в более широком смысле — в смысле множества модальных законов, которым подчиняется оператор необходимости. Исходя из уже полученных результатов, можно сказать, что (в этом же широком смысле) через оператор разрешимости выражается оператор *некоторой*, быть может, отличной от исходной, необходимости.

5.4. Определимость классов шкал в $\boxtimes$-языке

Заметим, что $\mathbf{Ver}^{\boxtimes} = \text{ИВ} + \{\boxtimes p \leftrightarrow \top\}$ (здесь ИВ — исчисление высказываний). Действительно, включение $\supseteq$ очевидно; обратное же включение следует из того, что если в произвольной формуле $A \in \mathbf{Ver}^{\boxtimes}$ заменить всякую подформулу вида $\boxtimes B$ на $\top$, то получим формулу, не содержащую модальностей, и следовательно, являющуюся тавтологией.

Далее, логика $\mathbf{Ver}^{\boxtimes}$ полна относительно класса $\mathfrak{Func}$ функциональных шкал: $\mathbf{Ver}^{\boxtimes} = \mathcal{L}^{\boxtimes}(\mathfrak{Func})$. Действительно, включение $\subseteq$ следует из предыдущего абзаца и общезначимости формулы $\boxtimes p \leftrightarrow \top$ на любой функциональной шкале. Обратное включение вытекает из того, что если $\boxtimes$-формула A общезначима на одноточечной иррефлексивной шкале (на которой, очевидно, общезначима и любая формула вида $\boxtimes B \leftrightarrow \top$), то $A \in \text{ИВ} + \{\boxtimes p \leftrightarrow \top\}$, поскольку замена всех подформул формулы A вида $\boxtimes B$ на $\top$ превращает A в общезначимую безмодальную формулу, т. е. тавтологию.

Более того, логика $\mathbf{Ver}^{\boxtimes}$ (равно как и формула $\boxtimes p$ и даже формула $\boxtimes\bot$) задает класс $\mathfrak{Func}$, т. е. $\mathfrak{Func} = \mathcal{F}(\mathbf{Ver}^{\boxtimes}) = \mathcal{F}(\boxtimes\bot)$, поскольку общезначимость формулы $\boxtimes\bot$ на некоторой шкале влечет общезначимость $\rhd p$, а значит и функциональность этой шкалы. Оказывается, в классе $\boxtimes$-логик $\mathbf{Ver}^{\boxtimes}$ является (единственной) максимальной.[3]

Теорема 5.4.1. $\mathcal{L}^{\boxtimes}(\mathcal{F}) \subseteq \mathbf{Ver}^{\boxtimes}$ *для любого класса шкал* $\mathcal{F} \neq \varnothing$. *В частности,* $L^{\boxtimes} \subseteq \mathbf{Ver}^{\boxtimes}$ *для любой нормальной* $\Box$*-логики* L.

Доказательство. Докажем, что $\boxtimes$-логика любой шкалы содержится в $\mathbf{Ver}^{\boxtimes}$. Пусть A есть $\boxtimes$-формула и $F \models A$. Рассмотрим формулу A как булеву комбинацию входящих в нее переменных и формул вида $\boxtimes B$:

[3]Для логик вида $L^{\boxtimes}$, где L — нормальная $\Box$-логика, т. е. для $\boxtimes$-логик $\Box$-определимых классов шкал, это следует из того, что согласно [21] имеет место $L \subseteq \mathbf{Ver}$ или $L \subseteq \mathbf{Triv}$, а также $\mathbf{Triv}^{\boxtimes} = \mathbf{Ver}^{\boxtimes}$, поскольку из $\Box p \leftrightarrow p$ следует $\rhd p \leftrightarrow \top$ и $\boxtimes p \leftrightarrow \top$.

$A \equiv f(\vec{p}, \boxtimes B_1, \dots, \boxtimes B_n)$, где f — булева формула, $\vec{p} = (p_1, \dots, p_m)$ — список всех переменных, входящих в A. Требуется доказать, что $\mathbf{Ver}^{\boxtimes} \vdash A$. Это эквивалентно утверждению $\mathbf{Ver}^{\boxtimes} \vdash f(\vec{p}, \top, \dots, \top)$, поскольку $\mathbf{Ver}^{\boxtimes} \vdash \boxtimes B \leftrightarrow \top$ для любой формулы B. Так как логика $\mathbf{Ver}^{\boxtimes}$ является консервативным расширением логики высказываний, нам остается проверить, что $f(\vec{p}, \top, \dots, \top)$ есть тавтология. Для этого возьмем произвольный набор $\vec{\sigma} \in \{\bot, \top\}^m$ значений переменных $\vec{p}$ и покажем, что значение формулы $f(\vec{p}, \top, \dots, \top)$ на нем равно $\top$, т. е. что формула $\vartheta := f(\vec{\sigma}, \top, \dots, \top)$ эквивалентна $\top$ (в логике высказываний).

Подстановка в формулу A значений $\vec{\sigma}$ вместо переменных $\vec{p}$ дает $\boxtimes$-предложение (т. е. $\boxtimes$-формулу, не содержащую переменных) $C := A[\vec{\sigma}/\vec{p}]$, причем $F \models C$. Подставим в формулу C вместо каждого вхождения оператора $\boxtimes$ его инфинитарное выражение через $\rhd$. Получим формулу $D = C_{\boxtimes} \in \mathbf{Fm}^{\rhd}_{\infty}$, в которую входят все переменные языка и такую что $F \models D$. Подставим в D любые значения ($\top$ или $\bot$) вместо всех переменных. Тогда получим инфинитарное $\rhd$-предложение E, общезначимое на F. Заметим, что $E = f(\vec{\sigma}, \bigwedge \rhd \Phi_1, \dots, \bigwedge \rhd \Phi_n)$, где Φ_i — не более чем счетные множества инфинитарных $\rhd$-предложений. Поскольку $F \models \rhd\varphi$ для любого инфинитарного $\rhd$-предложения φ, то на шкале F формула E эквивалентна $f(\vec{\sigma}, \top, \dots, \top) = \vartheta$, откуда вытекает, что $F \models \vartheta$ и ϑ является тавтологией. $\dashv$

Под (*инфинитарной*) $\boxtimes$-*определимостью* мы будем понимать определимость в (инфинитарном) $\boxtimes$-языке (точные определения даются аналогично определениям 5.1.1 и 5.3.1).

Следствие 5.4.2. *Если класс шкал $\mathcal{F} \neq \varnothing$ является $\boxtimes$-определимым, то $\mathfrak{Func} \subseteq \mathcal{F}$.*

Доказательство. Очевидно, что класс $\mathcal{F}$ определяется своей $\boxtimes$-логикой: $\mathcal{F} = \mathcal{F}(L)$, где $L := \mathcal{L}^{\boxtimes}(\mathcal{F})$. По теореме 5.4.1 имеем: $L \subseteq \mathbf{Ver}^{\boxtimes}$. Пользуясь леммой 5.1.3, заключаем, что $\mathfrak{Func} \subseteq \mathcal{F}$. $\dashv$

Установленные факты свидетельствуют о том, что $\boxtimes$-определимые классы обладают свойствами, похожими на свойства $\rhd$-определимых классов.

Гипотеза: Класс шкал $\boxtimes$-определим $\Leftrightarrow$ он $\rhd$-определим.

Здесь импликация '$\Leftarrow$' очевидна, поскольку $\models \rhd p \leftrightarrow (\boxtimes p \vee \boxtimes\neg p)$.

Заметим, что инфинитарная $\boxtimes$-определимость эквивалентна инфинитарной $\rhd$-определимости, поскольку оператор $\rhd$ финитарно $\boxtimes$-определим, а $\boxtimes$ инфинитарно $\rhd$-определим.

5.5. Эквиваленты I и II порядка для $\boxtimes$-формул

В доказываемой ниже теореме мы устанавливаем, что классы шкал, определяемые $\boxtimes$-формулами:

$$(\mathsf{A}_{\mathbf{4}}^{\boxtimes}) \qquad \boxtimes p \to \boxtimes\boxtimes p$$
$$(\mathsf{A}_{\mathbf{5}}^{\boxtimes}) \qquad \neg\boxtimes p \to \boxtimes\neg\boxtimes p$$

задаются теми же формулами $(\varphi_{\mathbf{4}}^{\rhd})$ и $(\varphi_{\mathbf{5}}^{\rhd})$ первого порядка, что и аналогичные $\rhd$-формулы (см. теорему 5.2.1).

Теорема 5.5.1. $F \models (\mathsf{A}_{\mathfrak{S}}^{\boxtimes}) \iff F \models^{1} (\varphi_{\mathfrak{S}}^{\rhd})$, *для каждого* $\mathfrak{S} \in \{\mathbf{4},\ \mathbf{5}\}$ *и произвольной шкалы* F.

Доказательство. В доказательстве части $(\Leftarrow)$ теоремы мы будем из предположения $F \models^{1} (\varphi_{\mathfrak{S}}^{\rhd})$ выводить истинность формулы $(\mathsf{A}_{\mathfrak{S}}^{\boxtimes})$ в любой точке w шкалы F при любой оценке $\models$ переменных. Поскольку все рассматриваемые формулы $(\mathsf{A}_{\mathfrak{S}}^{\boxtimes})$ принадлежат логике $\mathbf{Ver}^{\boxtimes}$, которая, в свою очередь, истинна в любой функциональной точке w, то достаточно проверять истинность $(\mathsf{A}_{\mathfrak{S}}^{\boxtimes})$ лишь в ветвящихся точках. Поэтому ниже в доказательстве части $(\Leftarrow)$ мы считаем, что выбрана шкала $F = \langle W, \uparrow\rangle$, такая что $F \models^{1} (\varphi_{\mathfrak{S}}^{\rhd})$, некоторая оценка $\models$ на F и *ветвящаяся* точка w шкалы F.

<u>$\mathfrak{S} = \mathbf{4}.$</u>

($\Rightarrow$) Допустим, $F \overset{1}{\not\models} (\varphi_4^{\boxtimes})$, т. е. $\widehat{\exists} w\ \widehat{\exists} x{\downarrow}w\ \exists y{\downarrow}x\colon \neg(w{\uparrow}y)$. Положим $!x \models q$ и $!y \not\models p$. Тогда имеем: $w \models \boxtimes p$, даже $w \models \Box p$, ибо $\neg(w{\uparrow}y)$; однако $w \not\models \boxtimes\boxtimes p$, а именно $w \not\models \rhd(q \to \boxtimes p)$, поскольку:

а) $w \models \Diamond(q \to \boxtimes p)$, ибо ввиду $Bra(w)$ найдется такая точка $z{\downarrow}w$, что $z \neq x$, и в ней $z \not\models q$, а следовательно, $z \models (q \to \rhd p)$.

б) $w \models \Diamond\neg(q \to \boxtimes p)$, ибо $w{\uparrow}x$ и, во-первых, $x \models q$, а во-вторых, $x \not\models \boxtimes p$, ибо $x \not\models \rhd p$, поскольку, с одной стороны, $x{\uparrow}y$ и $y \not\models p$, а с другой, $Bra(x)$, и значит найдется такая точка $t{\downarrow}x$, что $t \neq y$, и в ней $t \models p$.

($\Leftarrow$) <u>Способ 1.</u> Предположим, что $w \models \boxtimes p$. Надо доказать: $w \models \boxtimes\boxtimes p$. Мы установим даже: $w \models \Box\boxtimes p$. Берем любую точку $x{\downarrow}w$. Возможны варианты:

а) если $Fnc(x)$, то, очевидно, $x \models \boxtimes p$;

б) если $Bra(x)$, то по $(\varphi_4^{\rhd})$ имеем $x{\uparrow} \subseteq w{\uparrow}$. Поэтому, взяв любую литеру ℓ, мы из $w \models \rhd(\ell \to p)$ заключаем $x \models \rhd(\ell \to p)$. Следовательно, $x \models \boxtimes p$.

<u>Способ 2.</u> Сведем к тому, что доказано для $\rhd$-языка. Очевидно, $w \models \boxtimes p \to \rhd(\ell \to p)$. В доказательстве аналогичной теоремы для $\rhd$-языка (теорема 5.2.1) было показано, что в предположении $F \overset{1}{\models} (\varphi_4^{\rhd})$ имеет место $F \models \rhd A \to \Box\rhd A$ для любой формулы A. Поэтому $w \models \boxtimes p \to \Box\rhd(\ell \to p)$ для любой литеры ℓ, и тем самым $w \models \boxtimes p \to \bigwedge_{\ell\in\mathrm{L}}\Box\rhd(\ell \to p)$. Пользуясь тем, что $\Box$ дистрибутивен относительно инфинитарной конъюнкции, т. е. общезначима эквивалентность $\bigwedge\Box\Phi \leftrightarrow \Box\bigwedge\Phi$, получаем $w \models \boxtimes p \to \Box\bigwedge_{\ell\in\mathrm{L}}\rhd(\ell \to p)$, т. е. $w \models \boxtimes p \to \Box\boxtimes p$. Отсюда вытекает $w \models \boxtimes p \to \boxtimes\boxtimes p$.

<u>$\mathfrak{S} = \mathbf{5}.$</u>

($\Rightarrow$) Допустим, $F \overset{1}{\not\models} (\varphi_5^{\rhd})$, т. е. $\widehat{\exists} w\ \exists x, y{\downarrow}w\colon \neg(x{\uparrow}y)$. Из $Bra(w)$ следует, что $\exists z{\downarrow}w\colon z \neq x$ (возможно, $z = y$). Положим $!x \models q$ и $!y \not\models p$. Тогда, с одной стороны, имеем: $w \models \neg\boxtimes p$, поскольку $w \models \neg\rhd p$, ибо $y \not\models p$ и по крайней мере одна из точек x, z отлична от y (обозначим ее t), так что $w{\uparrow}t$ и $t \models p$. С другой стороны, $w \not\models \boxtimes\neg\boxtimes p$, поскольку $w \not\models \rhd(q \to \neg\boxtimes p)$.

Действительно, $w \models \Diamond(q \to \neg\boxtimes p)$, ибо $z \not\models q$; $w \models \Diamond\neg(q \to \neg\boxtimes p)$, ибо $x \models q$ и $x \models \Box p$ ввиду $\neg(x{\uparrow}y)$, а значит $x \models q \,\&\, \boxtimes p$. Следовательно, $w \not\models (\mathsf{A}_{\mathbf{5}}^{\boxtimes})$.

($\Leftarrow$) Пусть $w \models \neg\boxtimes p$, тогда $w \models \neg\rhd(\ell \to p)$ для некоторой литеры ℓ. В доказательстве аналогичной теоремы для $\rhd$-языка (теорема 5.2.1) было показано, что в предположении $F \overset{1}{\models} (\varphi_{\mathbf{5}}^{\rhd})$ имеет место $F \models \neg\rhd A \to \Box\neg\rhd A$ для любой формулы A. Поэтому, обозначив $A := (\ell \to p)$, мы заключаем $w \models \Box\neg\rhd(\ell \to p)$. Ввиду общезначимости импликации $\boxtimes p \to \rhd(\ell \to p)$ отсюда следует $w \models \Box\neg\boxtimes p$, и значит, $w \models \boxtimes\neg\boxtimes p$. $\dashv$

Далее покажем, что обе “аксиомы Лёба”

$$(\mathsf{A}_{\mathbf{L}}^{\rhd}) \qquad \rhd(\rhd p \to p) \to \rhd p$$
$$(\mathsf{A}_{\mathbf{L}}^{\boxtimes}) \qquad \boxtimes(\boxtimes p \to p) \to \boxtimes p$$

отвечают одному и тому же условию второго порядка. Введем следующее условие, означающее отсутствие бесконечных возрастающих цепей ветвящихся точек:

$$(\varphi_{\mathbf{L}}^{\rhd}) \qquad \neg\widehat{\exists} w_0{\uparrow}w_1{\uparrow}w_2\ldots$$

Теорема 5.5.2. $F \models (\mathsf{A}_{\mathbf{L}}^{\rhd}) \iff F \models (\mathsf{A}_{\mathbf{L}}^{\boxtimes}) \iff [F \overset{1}{\models} (\varphi_{\mathbf{4}}^{\rhd})$ *и* $F \models (\varphi_{\mathbf{L}}^{\rhd})]$.

Доказательство.

<u>$F \models (\mathsf{A}_{\mathbf{L}}^{\rhd}) \iff [F \overset{1}{\models} (\varphi_{\mathbf{4}}^{\rhd})$ и $F \models (\varphi_{\mathbf{L}}^{\rhd})]$.</u>

(1) Сначала докажем, что $F \models (\mathsf{A}_{\mathbf{L}}^{\rhd}) \Rightarrow F \overset{1}{\models} (\varphi_{\mathbf{4}}^{\rhd})$. Допустим, что $\widehat{\exists} w$ $\widehat{\exists} x{\downarrow}w$ $\exists y{\downarrow}x$: $\neg(w{\uparrow}y)$. Рассмотрим два случая:

1) $x{\uparrow}x$. Положим $!x \not\models p$. Тогда $w \not\models \rhd p$, ибо $x \not\models p$ и ввиду $Bra(w)$ имеем $\exists z{\downarrow}w$: $z \neq x$, так что $z \models p$. В то же время, $w \models \rhd(\rhd p \to p)$, и даже $w \models \Box(\rhd p \to p)$, поскольку для любой точки $t{\downarrow}w$ имеем: если $t \not\models p$, то $t = x$, и тогда $t \not\models \rhd p$, ибо $t{\uparrow}y \models p$ и $t{\uparrow}x \not\models p$.

2) $\neg(x{\uparrow}x)$. Положим переменную p ложной только в точках x и y. Тогда $w \not\models \rhd p$, ибо $x \not\models p$ и ввиду $Bra(w)$ имеем $\exists z{\downarrow}w$: $z \neq x$, при этом $z \neq y$, ибо $\neg(w{\uparrow}y)$, и значит $z \models p$. В то же время, $w \models \rhd(\rhd p \to p)$, и даже $w \models$

$\Box(\rhd p \to p)$, поскольку для любой точки $t{\downarrow}w$ имеем: если $t \not\models p$, то $t = x$ (так как $t \neq y$ ввиду $\neg(w{\uparrow}y)$), и тогда $x \not\models \rhd p$, ибо $x{\uparrow}y \not\models p$ и ввиду $Bra(x)$ имеем $\exists s{\downarrow}x$: $s \neq y$, причем $s \neq x$ в силу $\neg(x{\uparrow}x)$, так что $s \models p$.

В любом случае получили, что $w \not\models \rhd(\rhd p \to p) \to \rhd p$.

(2) Теперь покажем, что если $F \overset{1}{\models} (\varphi^{\rhd}_{\mathbf{4}})$, то: $F \models (\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{L}}) \Leftrightarrow F \models (\varphi^{\rhd}_{\mathbf{L}})$.

$(\Leftarrow)$ Предположим, что при некоторой оценке переменных имеем $w_0 \not\models \rhd(\rhd p \to p) \to \rhd p$. Это значит, во-первых, что $w_0 \not\models \rhd p$, откуда $Bra(w_0)$ и $\exists w_1{\downarrow}w_0$: $w_1 \not\models p$. Во-вторых, $w_0 \models \rhd(\rhd p \to p)$. Но случай $w_0 \models \Box\neg(\rhd p \to p)$ невозможен, иначе $w_0 \models \Box\neg p$, что не так. Значит, $w_0 \models \Box(\rhd p \to p)$, что вместе с $w_1 \not\models p$ влечет $w_1 \not\models \rhd p$. В доказательстве части $(\Leftarrow)$ пункта $\mathfrak{S} = \mathbf{4}$ теоремы 5.2.1 мы установили, что в условиях $F \overset{1}{\models} (\varphi^{\rhd}_{\mathbf{4}})$ имеет место $F \models \Box A \to \Box\rhd A$ для любой $\rhd$-формулы A. Применяя это к формуле $A := (\rhd p \to p)$, получим $w_0 \models \Box\rhd(\rhd p \to p)$, откуда $w_1 \models \rhd(\rhd p \to p)$. Итак, мы построили точку $w_1{\downarrow}w_0$, в которой $w_1 \not\models \rhd(\rhd p \to p) \to \rhd p$. Продолжая этот процесс, мы получим возрастающую цепь из ветвящихся точек.

$(\Rightarrow)$ Предположим, имеется возрастающая цепь из ветвящихся точек $w_0{\uparrow}w_1{\uparrow}\ldots$ Рассмотрим два случая:

1) $\exists n$: $w_n{\uparrow}w_n$. Ввиду $Bra(w_n)$ имеем: $\exists x{\downarrow}w$: $x \neq w_n$. Положим $!w_n \not\models p$. Тогда $w_n \not\models \rhd p$ и $w_n \models \Box(\rhd p \to p)$, поскольку $\forall y{\downarrow}w_n$ если $y \not\models p$, то $y = w_n$ и $y \not\models \rhd p$. Значит, $w_n \not\models (\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{L}})$.

2) $\forall n\, \neg(w_n{\uparrow}w_n)$. Тогда все точки w_n различны, иначе из $w_n{\uparrow}\ldots{\uparrow}w_m = w_n$ по транзитивности, имеющей место для ветвящихся точек, следует $w_n{\uparrow}w_n$. Положим p ложной только в точках w_n с четными n. Тогда $w_0 \not\models \rhd p$, ибо $w_0{\uparrow}w_1 \models p$ и $w_0{\uparrow}w_2 \not\models p$. А также $w_0 \models \Box(\rhd p \to p)$, поскольку $\forall x{\downarrow}w_0$ если $x \not\models p$, то $x = w_{2n}$ для некоторого n и значит $x \not\models \rhd p$. Таким образом, $w_0 \not\models (\mathsf{A}^{\rhd}_{\mathbf{L}})$.

$\underline{F \models (\mathsf{A}^{\boxtimes}_{\mathbf{L}}) \Longleftrightarrow [F \overset{1}{\models} (\varphi^{\rhd}_{\mathbf{4}}) \text{ и } F \models (\varphi^{\rhd}_{\mathbf{L}})].}$

(1) Сначала установим импликацию: $F \models (\mathsf{A}^{\boxtimes}_{\mathbf{L}}) \Rightarrow F \overset{1}{\models} (\varphi^{\rhd}_{\mathbf{4}})$.

Допустим $F \overset{1}{\not\models} (\varphi_{\mathbf{4}}^{\triangleright})$, т. е. $\widehat{\exists} w\ \widehat{\exists} x{\downarrow}w\ \exists y{\downarrow}x\ \neg(w{\uparrow}y)$. Ясно, что $x \neq y$. Поскольку $Bra(w)$ и $Bra(x)$, то $\exists t{\downarrow}w$: $t \neq x$ и $\exists z{\downarrow}x$: $z \neq y$. Возможны варианты:

а) $\neg(x{\uparrow}x)$. Положим лишь $x \not\models p$ и $y \not\models p$. Тогда:

- $w \not\models \boxtimes p$, ибо $w \not\models \triangleright p$, поскольку $w{\uparrow}x \not\models p$, $w{\uparrow}t \models p$ (ввиду $t \neq x$, $\neg(w{\uparrow}y)$ и $t \neq y$);

- $w \models \Box(\boxtimes p \to p)$, ибо $\forall s{\downarrow}w$ если $s \not\models p$, то $s = x$, а тогда $s \not\models \boxtimes p$, поскольку $s \not\models \triangleright p$, так как $s{\uparrow}y \not\models p$ и $s{\uparrow}z \models p$ (ввиду $z \neq x, y$).

б) $x{\uparrow}x$. Положим $!x \not\models p$. Тогда:

- $w \not\models \boxtimes p$, ибо $w \not\models \triangleright p$, поскольку $w{\uparrow}x \not\models p$ и $w{\uparrow}t \models p$;

- $w \models \Box(\boxtimes p \to p)$, ибо $\forall s{\downarrow}w$ если $s \not\models p$, то $s = x$, а тогда $s \not\models \boxtimes p$, поскольку $s \not\models \triangleright p$, так как $x{\uparrow}x \not\models p$ и $x{\uparrow}y \models p$.

В любом случае получаем: $w \not\models (\mathsf{A}_{\mathbf{L}}^{\boxtimes})$.

(2) Пусть теперь $F \overset{1}{\models} (\varphi_{\mathbf{4}}^{\triangleright})$. Докажем: $F \models (\mathsf{A}_{\mathbf{L}}^{\boxtimes}) \Leftrightarrow F \models (\varphi_{\mathbf{L}}^{\triangleright})$.

($\Rightarrow$) Допустим $\widehat{\exists} w_0{\uparrow}w_1{\uparrow}w_2 \ldots$ Рассмотрим случаи:

а) $\exists n\ (w_n{\uparrow}w_n)$. Ввиду $Bra(w_n)$ имеем: $\exists x{\downarrow}w_n$: $x \neq w_n$. Положим $!w_n \not\models p$. Тогда $w \not\models \boxtimes p$, поскольку $w \not\models \triangleright p$. Но $w_n \models \Box(\boxtimes p \to p)$, ибо $\forall y{\downarrow}w_n$ если $y \not\models p$, то $y = w_n$, а тогда $y \not\models \boxtimes p$ по доказанному выше.

б) $\forall n\ \ \neg(w_n{\uparrow}w_n)$. Тогда все точки w_n различны (иначе из $w_n{\uparrow}\ldots{\uparrow}w_m = w_n$ по транзитивности, имеющей место для ветвящихся точек в силу $(\varphi_{\mathbf{4}}^{\triangleright})$, следует $w_n{\uparrow}w_n$). Положим p ложной только в точках w_n с четными n. Тогда $w_0 \not\models \boxtimes p$, ибо $w_0{\uparrow}w_1 \models p$ и $w_0{\uparrow}w_2 \not\models p$. А также $w_0 \models \Box(\boxtimes p \to p)$, поскольку $\forall x{\downarrow}w_0$ если $x \not\models p$, то $x = w_{2n}$ для некоторого n и значит $x \not\models \boxtimes p$ по аналогии. Таким образом, $w_0 \not\models (\mathsf{A}_{\mathbf{L}}^{\boxtimes})$.

($\Leftarrow$) По предположению, $F \overset{1}{\models} (\varphi_{\mathbf{4}}^{\triangleright})$, а значит $F \models (\mathsf{A}_{\mathbf{4}}^{\boxtimes})$ и по доказанному в случае $\mathfrak{S} = \mathbf{4}$ имеем $F \models \boxtimes A \to \Box\boxtimes A$ для любой формулы A.

Допустим, что $w \not\models (\mathsf{A}_{\mathbf{L}}^{\boxtimes})$. Тогда, во-первых, $w \not\models \boxtimes p$, т. е. $\exists \ell \in \mathrm{Ł}$: $w \not\models \triangleright(\ell \to p)$; при этом очевидно, что $\ell \neq p$ и $\ell \neq \neg p$; отсюда $Bra(w)$ и $\exists x, y{\downarrow}w$: $x \models \ell \to p$, $y \not\models \ell \to p$.

Во-вторых, $w \models \boxtimes(\boxtimes p \to p)$, откуда вытекает $w \models \rhd[(\ell \,\&\, \boxtimes p) \to p]$. Последнее означает:

$$w \models \Box(\neg\ell \vee \neg\boxtimes p \vee p) \quad \text{или} \quad w \models \Box\ell \,\&\, \Box\boxtimes p \,\&\, \Box\neg p.$$

Второй дизъюнктивный член не может быть истинным, иначе бы $w \models \Box\neg(\ell \to p)$ и тем самым $w \models \rhd(\ell \to p)$, что не так. Значит, $w \models \Box(\neg\ell \vee \neg\boxtimes p \vee p)$. Далее, поскольку $y \not\models (\neg\ell \vee p)$, то $y \not\models \boxtimes p$. Кроме того, из $w \models \boxtimes(\boxtimes p \to p)$ ввиду общезначимости схемы $\boxtimes A \to \Box\boxtimes A$ на шкале F вытекает $w \models \Box\boxtimes(\boxtimes p \to p)$ и $y \models \boxtimes(\boxtimes p \to p)$.

Итак, $y \not\models (\mathsf{A}^{\boxtimes}_{\mathbf{L}})$. Повторение этой конструкции даст нам бесконечную возрастающую цепь $w{\uparrow}y{\uparrow}\ldots$ ветвящихся точек. $\dashv$

Подводем итог сравнению выразительных возможностей модальных языков с операторами $\Box$, $\rhd$ и $\boxtimes$. Изобразим их соотношение в виде диаграммы, где стрелки ведут в сторону увеличения (нестрогого '$\Rightarrow$' и строгого '$\to$') выразительных возможностей языка (т. е. $\mathbf{Fm}_1 \Rightarrow \mathbf{Fm}_2$ означает, что всякий класс шкал, определимый в языке $\mathbf{Fm}_1$, определим также и в языке $\mathbf{Fm}_2$; а $\mathbf{Fm}_1 \to \mathbf{Fm}_2$ означает, что верно $\mathbf{Fm}_1 \Rightarrow \mathbf{Fm}_2$ и неверно $\mathbf{Fm}_2 \Rightarrow \mathbf{Fm}_1$):

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} \mathbf{Fm}^{\Box}_{\infty} & \Leftarrow & \mathbf{Fm}^{\boxtimes}_{\infty} & = & \mathbf{Fm}^{\rhd}_{\infty} \\ \Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\ \mathbf{Fm}^{\Box} & \leftarrow & \mathbf{Fm}^{\boxtimes} & \Leftarrow & \mathbf{Fm}^{\rhd} \end{array}}$$

Оператор слабой необходимости $\boxtimes$ имеет ряд сходств с оператором необходимости $\Box$, а именно:

$\surd$ Если $\Box$ является оператором необходимости (т. е. подчиняется законам нормальной логики), то $\boxtimes$ — тоже.

$\surd$ Если $\Box$ подчиняется закону транзитивности $\Box p \to \Box\Box p$, евклидовости $\neg\Box p \to \Box\neg\Box p$ или обратной фундированности $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$, то $\boxtimes$ — тоже.

$\surd$ Минимальная нормальная логика **K** оператора $\Box$ замкнута относительно правила $\boxtimes p \vdash \Box p$; для $\boxtimes$ справедливо аналогичное утверждение.

$\surd$ Оператор разрешимости $\rhd$ выражается через оба оператора необходимости одинаковым образом: $\rhd p = (\Box p \vee \Box\neg p)$ и $\rhd p = (\boxtimes p \vee \boxtimes\neg p)$. Более того, $\boxtimes$ является самой слабой необходимостью, через которую $\rhd$ выражается таким равенством.

В то же время, свойства $\boxtimes$-языка сходны со свойствами $\rhd$-языка в следующих аспектах:

$*$ Любой определимый в этих языках класс шкал содержит все функциональные шкалы.

$*$ Формулами инфинитарных языков с операторами $\rhd$ и $\boxtimes$ определимы одни и те же классы шкал.

$*$ Аксиомы в языках операторов $\rhd$ и $\boxtimes$, отвечающие естественным образом логикам **K4**, **K5** и **GL**, определяют одни и те же классы шкал (задаваемые условиями $(\varphi^{\rhd}_{\mathbf{4}})$, $(\varphi^{\rhd}_{\mathbf{5}})$ и $[(\varphi^{\rhd}_{\mathbf{4}})\ \&\ (\varphi^{\rhd}_{\mathbf{L}})]$ соответственно).

Наконец, оператор $\boxtimes$ имеет несколько отличий по своим свойствам от оператора $\Box$, а именно:

$\star$ Минимальные инфинитарные логики этих операторов отличны друг от друга: $\mathbf{K}^{\Box}_{\infty} \neq \mathbf{K}^{\boxtimes}_{\infty}$.

$\star$ Логики этих операторов над логикой **KB** различны: $\mathbf{KB}^{\Box} \neq \mathbf{KB}^{\boxtimes}$.

$\star$ Оператор $\boxtimes$ инфинитарно вырази́м через оператор разрешимости $\rhd$ (т. е. существует инфинитарная $\rhd$-формула, эквивалентная формуле $\boxtimes p$), тогда как $\Box$ — не вырази́м (в том же смысле).

$*\quad*\quad*$

Одним из важных и интересных вопросов при изучении логических языков является структурная характеризация классов моделей (шкал, структур и т. п.), определимых в рассматриваемом языке. Так, известная в алгебре теорема Биркгофа утверждает, что класс универсальных алгебр определим системой тождеств если и только если он является многообразием, т. е. замкнут относительно операций взятия подалгебры, гомоморфного образа и прямых произведений. С помощью теории двойственности этот результат переносится в модальную логику и дает следующую теорему, доказанную Голдблаттом и Томасоном [16] (см. также более простое изложение этого результата в [10]); элементарный класс шкал Крипке определим в $\Box$-языке если и только если он замкнут относительно операций взятия порожденной подшкалы, образа относительно ограниченных морфизмов, прямых сумм и содержит всякую шкалу, ультрафильтровое расширение (ultrafilter extension) которой принадлежит этому классу.

Очевидно, что всякий $\rhd$-определимый класс шкал, будучи также и $\Box$-определимым, удовлетворяет условиям замкнутости, перечисленным в теореме Голдблатта–Томасона. Эти условия являются необходимыми, но не достаточными для $\rhd$-определимости, поскольку выразительные возможности $\rhd$-языка строго слабее, чем $\Box$-языка. Новое необходимое условие было найдено нами в § 5.1, а именно всякий $\rhd$-определимый класс шкал обязан содержать все функциональные шкалы. Еще одно необходимое условие было указано в статье [17]: $\rhd$-определимый класс вместе с любой шкалой содержит все эквивалентные ей шкалы в следующем смысле. Две шкалы эквивалентны, если они получаются друг из друга добавлением/удалением "функциональных стрелок" (*стрелка* есть элемент отношения достижимости; стрелка *функциональна*, если нет других стрелок этой шкалы, выходящих из начала данной стрелки). Вопрос о том, является ли полученный набор условий достаточным для $\rhd$-определимости класса шкал, остается открытым.

Библиография

[1] Л. Д. Беклемишев, О классификации пропозициональных логик доказуемости, *Изв. АН СССР*, Серия матем., т. 53, 5 (1989), с. 915–943.

[2] Е. Золин, Интерполяционное свойство Крейга в логиках доказательств с оператором сильной доказуемости, *Вестн. Моск. ун-та.* Серия 1. Математика. Механика, 1997, вып. 4, с. 53–55. Translation in *Moscow Univ. Math. Bull.* 52 (1997), no. 4, 39–41. [MR 99c:03028]

[3] Е. Золин, Секвенциальные рефлексивные логики разрешимости, *Мат. заметки*, 2002, т. 71, вып. 6, с. 798-814.

[4] Е. Золин, Секвенциальная логика арифметической разрешимости, *Вестн. Моск. ун-та.* Серия 1. Математика. Механика. 2001. № 6, с. 43–48.

[5] Г. Е. Минц, Системы Льюиса и система T (1965–1973). — В кн.: Р. Фейс, Модальная логика. М.: Наука, 1974, с. 423–509.

[6] Орлов И. Е., Исчисление совместности предложений. *Мат. сборник*, 1928, т. 35, № 3, pp. 263–286.

[7] S. Artёmov, Logic of Proofs, *Annals of Pure and Applied Logic*, vol. 67 (1994), pp. 29–59.

[8] A. Avron, On Modal Systems Having Arithmetical Interpretation, *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 49 (1984), num. 3, pp. 935–942.

[9] L. D. Beklemishev, Classification of Propositional Provability Logics. *Amer. Math. Soc. Transl.* (2), 192:1–56.

[10] P. Blackburn, M. de Rijke and Y. Venema. *Modal Logic. A Textbook.* Unpublished manuscript. CWI, Amsterdam, 1994.

[11] G. Boolos, *The Logic of Provability.* Cambridge University Press, 1993.

[12] A. Chagrov, M. Zakharyaschev, *Modal Logic*, Oxford Science Publications, 1997.

[13] M. J. Cresswell, Necessity and contingency, *Studia Logica*, vol. 47 (1988), pp. 145–149.

[14] J. N. Crossley (ed). *Algebra and Logic.* Springer Lecture Notes in Mathematics, 450. Berlin, 1975.

[15] K. Gödel, Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalkuls, *Ergebnisse Math. Colloc.*, Bd. 4 (1933), S. 39–40.

[16] R. I. Goldblatt, S. K. Thomason, Axiomatic classes in propositional modal logic. In [14], pp.163–173.

[17] I. L. Humberstone, The logic of non-contingency, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 1995, 36(2):214–229.

[18] S. T. Kuhn, abstract in "Mathematical Reviews", 1996g:03030.

[19] S. T. Kuhn, Minimal non-contingency logic, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 1995, 36(2):230–234.

[20] M. H. Löb, Solution of a problem of Leon Henkin, *Journal of Symbolic Logic*, 20 (1955), 115–118.

[21] D. Makinson, Some embedding theorems for modal logic, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 1971, 12(2):252–254.

[22] H. Montgomery, R. Routley, Contingency and non-contingency bases for normal modal logics, *Logique et analyse*, vol. 9 (1966), pp. 318–328.

[23] H. Montgomery, R. Routley, Noncontingency axioms for $S4$ and $S5$, *Logique et analyse*, vol. 11 (1968), pp. 422–424.

[24] H. Montgomery, R. Routley, Modalities is a sequence of normal non-contingency modal systems, *Logique et analyse*, vol. 12 (1969), pp. 225–227.

[25] C. Mortensen, A sequence of normal modal systems with non-contingency bases, *Logique et Analyse*, vol. 19 (1976), pp. 341–344.

[26] E. Nogina, Logic of Proofs with Strong Provability Operator. International Conference on Proof Theory, Provability Logic and Computation (PPC'94), Berne, Switzeland, 1994, pp. 1–22.

[27] M. Ohnishi, K. Matsumoto, Gentzen method in modal calculi, *Osaka Math. J.*, vol. 9 (1957), num. 2, pp. 113–130. (Correction: *Osaka Math. J.*, vol. 10 (1958), num. 1, p. 147.)

[28] M. Ohnishi, K. Matsumoto, Gentzen method in modal calculi II, *Osaka Math. J.*, vol. 11 (1959), num. 2, pp. 115–120.

[29] R. M. Smullyan, Analytic Cut, *The Journal of Symbolic Logic*, 33 (1968), pp. 560–564.

[30] R. Solovay, Provability interpretations of modal logics, *Israel Journal of Mathematics*, vol. 25 (1976), pp. 287–304.

[31] M. Takano, Subformula property as a substitute for cut elimination in modal propositional logics, *Mathematica Japonica*, vol. 37 (1992), num. 6, pp. 1129–1145.

[32] E. Zolin, Completeness and Definability in the Logic of Noncontingency, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 1999, vol. 40, № 4, pp. 533–547.

[33] E. Zolin, Infinitary Definability of Necessity in Terms of Contingency, Proceedings of ESSLLI Student Session. — Finland, Helsinki, 13–24 August 2001, pp. 310–319.