МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М. В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи
УДК 510.643, 510.23

ЗОЛИН ЕВГЕНИЙ ЕВГЕНЬЕВИЧ

МОДАЛЬНЫЕ ЛОГИКИ С ОПЕРАТОРОМ РАЗРЕШИМОСТИ

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

А в т о р е ф е р а т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2002

Работа выполнена на кафедре математической логики и теории алгоритмов механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

Научные руководители	—	доктор физико-математических наук, профессор С. Н. Артёмов доктор физико-математических наук, профессор В. А. Успенский
Официальные оппоненты	—	доктор физико-математических наук, А. В. Чагров кандидат физико-математических наук, Н. Х. Хаханян
Ведущая организация	—	Новосибирский государственный университет

Защита диссертации состоится "___" _________ 2002 г. в 16 ч. 15 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова по адресу: 119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 14–08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан "___" _____________ 2002 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 в МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор В. Н. Чубариков

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. При построении логических исчислений в модальной логике традиционным стал выбор языка с операторами необходимости $\Box$ и возможности $\Diamond$. Однако определенный технический и философский интерес (см. [1][1]) представляют системы, где в качестве базисного выбирается оператор *разрешимости* (или *неслучайности*), подразумеваемая семантика которого задается равенством $\rhd A = \Box A \vee \Box\neg A$. (Термин „неслучайность“ — non-contingency — принят в англоязычной литературе; мы будем употреблять более удобный, по мнению автора, термин „разрешимость“, происходящий из рассмотрения доказуемостной интерпретации оператора $\Box$: предложение *разрешимо* в теории, если в ней доказуемо либо оно, либо его отрицание). Указанное равенство задает перевод $\rhd$-формул (т. е. формул модального языка с единственным модальным оператором $\rhd$, или $\rhd$-языка) в $\Box$-формулы (определяемые аналогично). Теперь, если задана $\Box$-логика L (т. е. логика в $\Box$-языке), то *логикой разрешимости* над L (обозначаемой посредством $L^{\rhd}$) называется множество $\rhd$-формул, переводы которых являются теоремами L.

В работах [1], [2][2] были предложены различные аксиоматики логик разрешимости над известными нормальными логиками **T**, **S4** и **S5** (определения которых см. ниже). Некоторые семейства логик разрешимости в интервале между $\mathbf{T}^{\rhd}$ и $\mathbf{S5}^{\rhd}$ изучались в работах [3][3], [4][4]. Отметим, что в случае когда логика L содержит **T**, а точнее, аксиому рефлексивности $\Box A \to A$, исследование логики разрешимости над L упрощается благодаря тому, что оператор $\Box$ вырази́м через $\rhd$ посредством равенства $\Box A = A \,\&\, \rhd A$. Аналогичная картина наблюдается, например, в логике **Ver**, имеющей в числе своих теорем все формулы вида $\Box A$: в этой логике $\Box$ выражается через $\rhd$ посредством равенства $\Box A = \top$. В статье [5][5] построен пример логики, не содержащей **T** и отличной от **Ver**, в которой тем не менее $\Box$ вырази́м через $\rhd$.

Систематичное изучение логики разрешимости было начато в работе [6][6], содержащей первую, достаточно громоздкую аксиоматику мини-

[1] [1] H. Montgomery, R. Routley, Contingency and non-contingency bases for normal modal logics, *Logique et analyse*, vol. 9 (1966), pp. 318–328.

[2] [2] H. Montgomery, R. Routley, Noncontingency axioms for $S4$ and $S5$, *Logique et analyse*, vol. 11 (1968), pp. 422–424.

[3] [3] H. Montgomery, R. Routley, Modalities is a sequence of normal non-contingency modal systems, *Logique et analyse*, vol. 12 (1969), pp. 225–227.

[4] [4] C. Mortensen, A sequence of normal modal systems with non-contingency bases, *Logique et Analyse*, vol. 19 (1976), pp. 341–344.

[5] [5] M. J. Cresswell, Necessity and contingency, *Studia Logica*, vol. 47 (1988), pp. 145–149.

[6] [6] I. L. Humberstone, The logic of non-contingency, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 1995, 36(2):214–229.

мальной логики разрешимости (т. е. логики $\mathbf{K}^{\triangleright}$). В последующей работе [7][7] эта аксиоматика была упрощена, а также была аксиоматизирована логика разрешимости над **K4**.

Определенный интерес к изучению модальной логики связан с возможностью использовать ее в качестве инструмента исследования понятия формальной доказуемости. Эти исследования восходят к работам И. Орлова [8][8] и К. Гёделя [9][9]. Формулировка „правильной“ логики доказуемости в арифметике Пеано, известной сейчас как логика Гёделя–Лёба **GL**, появилась позднее в работе М. Лёба [10][10]; первое доказательство арифметической полноты логики **GL** принадлежит Р. Соловэю [11][11]. **GL** является минимальной логикой доказуемости: она описывает модальные законы, которым подчиняется предикат доказуемости в „объектной“ теории **PA** с точки зрения „метатории“ **PA**. Если же варьировать „метаторию“ в классе расширений **PA**, а „объектную“ теорию — в классе перечислимых расширений **PA**, то получится семейство логик доказуемости (имеющее мощность континуума), полностью описанное Л. Д. Беклемишевым [12][12] (формальные определения см. там же).

Наряду с доказуемостью, понятие разрешимости в формальной теории является одним из центральных в теории доказательств. Так, первая теорема Гёделя о неполноте утверждает, что, в определенных предположениях относительно непротиворечивости **PA**, существуют истинные неразрешимые в **PA** предложения. Здесь естественным образом возникает интересная проблема описания семейства пропозициональных логик арифметической разрешимости, аналогичная упомянутой выше.

Другим аспектом, объясняющим интерес к модальной логике, являются выразительные возможности ее языка, с точки зрения, например, семантики Крипке. Известно (см. [13][13], [14][14]), что, с одной стороны, модальный язык не сравним по выразительным возможностям с языком первого порядка, а с другой, он вкладывается в язык второго порядка.

Поскольку имеется естественное вложение $\triangleright$-языка в $\Box$-язык, выра-

[7] [7] S. T. Kuhn, Minimal non-contingency logic, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 1995, 36(2):230–234.

[8] [8] I. E. Orlov, The calculus of compatibility of propositions, *Mathematics of the USSR, Sbornik*, vol. 35 (1928), pp. 263–286 (in Russian).

[9] [9] K. Gödel, Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalkuls, *Ergebnisse Math. Colloc.*, Bd. 4 (1933), S. 39–40.

[10] [10] M. H. Löb, Solution of a problem of Leon Henkin, *Journal of Symbolic Logic*, 20 (1955), 115–118.

[11] [11] R. Solovay, Provability interpretations of modal logics, *Israel Journal of Mathematics*, vol. 25 (1976), pp. 287–304.

[12] [12] Л. Д. Беклемишев, О классификации пропозициональных логик доказуемости, *Изв. АН СССР*, Серия матем., т. 53, 5 (1989), с. 915–943.

[13] [13] G. Boolos, *The Logic of Provability.* Cambridge University Press, 1993.

[14] [14] P. Blackburn, M. de Rijke and Y. Venema. *Modal Logic. A Textbook.* Cambridge Univercity Press, Cambridge, 2001.

зительные возможности первого не больше, чем последнего. В статье [6] было обнаружено, что они даже существенно меньше: многие классы шкал, определимые в $\Box$-языке, такие как классы рефлексивных, сериальных, транзитивных, симметричных, евклидовых шкал, оказываются не определимыми в $\rhd$-языке. В настоящее время вопрос о точных границах выразительных возможностей $\rhd$-языка остается пока мало изученным.

Цель работы. Диссертация имеет целью разработать технику построения аксиоматических систем гильбертовского типа и секвенциальных исчислений для модальных логик с оператором разрешимости, а также исследовать выразительные возможности модального языка с оператором разрешимости.

Методы исследования. В работе использована техника построения канонических моделей для доказательства полноты систем гильбертовского типа, адаптированная для применения к логикам разрешимости в работах [6], [7], а также метод пополнения секвенций и его модификация — метод насыщения секвенций для доказательства полноты секвенциальных исчислений.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1) Построены гильбертовские системы для логик разрешимости над логиками **B**, **K5**, **K45**, „эпистемической“ логикой **KD45**, логикой Гжегорчика **Grz**, логикой арифметической доказуемости **GL**.

2) Построены секвенциальные исчисления (с сечением) для логик разрешимости над логиками **K**, **K4**, **GL**, а также секвенциальные исчисления с аналитическим правилом сечения для логик разрешимости над рефлексивными логиками **T**, **S4**, **B**, **S5**, **Grz**. Доказано, что последние логики обладают интерполяционным свойством Крейга.

3) Установлено, что в секвенциальных исчислениях для рефлексивных логик разрешимости сечение неустранимо; в то же время, доказано, что данные исчисления для логик разрешимости над **T**, **S4**, **S5** и **Grz** обладают (слабым в случае **Grz**) свойством подформульности.

4) Доказана определимость в элементарном языке классов шкал, задаваемых некоторыми из аксиом рассмотренных логик разрешимости.

5) Построена полная аксиоматика логик доказательств с оператором сильной разрешимости, отвечающих некоторым естественным классам предикатов доказательства в арифметике.

6) Найден инфинитарный оператор необходимости, определимый через оператор разрешимости, и изучены выразительные возможности языка с этим оператором в смысле семантики Крипке.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Ее методы и результаты могут быть полезны специалистам по модальной логике и теории доказательств Московского государственного университета, Новосибирского государственного университета, Санкт-Петербургского государственного университета, Математического института им. В. А. Стеклова РАН.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на семинаре "Модальная и алгебраическая логика" (под руководством В. Б. Шехтмана и М. Р. Пентуса), на семинаре "Алгоритмические вопросы алгебры и логики" (под руководством проф. С. И. Адяна) и на Научно-исследовательском семинаре по математической логике механико-математического факультета МГУ (под руководством проф. С. И. Адяна и проф. В. А. Успенского), семинаре по математической логике математического факультета Тверского государственного университета (под руководством проф. А. В. Чагрова).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в пяти работах автора, перечисленных в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения и пяти глав. Текст диссертации изложен на 100 страницах. Список литературы содержит 33 наименования.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** приведен обзор результатов по исследуемой проблеме и кратко формулируются основные результаты диссертации.

В **первой главе** вводятся основные определения и формулируются известные факты, используемые в дальнейшем изложении.

Определение 1. Алфавит пропозиционального модального языка (или $\Box$-*языка*) содержит переменные $\mathrm{Var} = \{p_0, p_1, \ldots\}$, связки $\bot$ (ложь), $\to$ (импликация) и одноместный модальный оператор $\Box$. Множество формул этого языка ($\Box$-*формул*), определяемое стандартным образом, обозначим $\mathbf{Fm}^{\Box}$. (*Классической модальной*) *логикой* (или $\Box$-*логикой*) называется произвольное множество $\Box$-формул, содержащее классические

$(\mathsf{A}^{\Box}_{\mathbf{T}})$	$\Box p \to p$	(рефлексивность)
$(\mathsf{A}^{\Box}_{\mathbf{D}})$	$\Box p \to \Diamond p$	(сериальность)
$(\mathsf{A}^{\Box}_{\mathbf{B}})$	$p \to \Box\Diamond p$	(симметричность)
$(\mathsf{A}^{\Box}_{\mathbf{4}})$	$\Box p \to \Box\Box p$	(транзитивность)
$(\mathsf{A}^{\Box}_{\mathbf{5}})$	$\Diamond p \to \Box\Diamond p$	(евклидовость)
$(\mathsf{A}^{\Box}_{\mathbf{1}})$	$\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$	(аксиома Маккинси)
$(\mathsf{A}^{\Box}_{\mathbf{L}})$	$\Box(\Box p \to p) \to \Box p$	(аксиома Лёба)
$(\mathsf{A}^{\Box}_{\mathbf{G}})$	$\Box(\Box(p \to \Box p) \to p) \to p$	(аксиома Гжегорчика)

Рис. 1. Аксиомы нормальных логик.

тавтологии в $\Box$-языке и замкнутое относительно правил modus ponens, подстановки и эквивалентной замены:

$$(\mathsf{MP})\ \frac{A \quad A \to B}{B} \qquad (\mathsf{Sub})\ \frac{A}{A[B/p]} \qquad (\mathsf{RE}^{\Box})\ \frac{A \leftrightarrow B}{\Box A \leftrightarrow \Box B}$$

(здесь $A[B/p]$ есть формула, полученная из A подстановкой формулы B вместо всех вхождений переменной p). Логика $\mathbf{K}$ задается следующими аксиомами и правилами (MP), (Sub) и (Nec):

$(\mathsf{A}^{\Box}_{\top})$ классические тавтологии в $\Box$-языке

$(\mathsf{A}^{\Box}_{\mathbf{K}})$ $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ (дистрибутивность)

$$(\mathsf{Nec})\ \frac{A}{\Box A}$$

Логика называется *нормальной*, если она содержит $\mathbf{K}$ и замкнута относительно правил исчисления $\mathbf{K}$. Остальные интересующие нас системы получаются добавлением к системе $\mathbf{K}$ аксиом, перечисленных на рис. 1. Мы будем рассматривать следующие нормальные модальные логики:

$$\begin{array}{rr}
\mathbf{T} = \mathbf{K} + (\mathsf{A}^{\Box}_{\mathbf{T}}), & \mathbf{S4} = \mathbf{T} + (\mathsf{A}^{\Box}_{\mathbf{4}}), \\
\mathbf{D} = \mathbf{K} + (\mathsf{A}^{\Box}_{\mathbf{D}}), & \mathbf{S5} = \mathbf{T} + (\mathsf{A}^{\Box}_{\mathbf{5}}), \\
\mathbf{B} = \mathbf{T} + (\mathsf{A}^{\Box}_{\mathbf{B}}), & \mathbf{S4.1} = \mathbf{S4} + (\mathsf{A}^{\Box}_{\mathbf{1}}), \\
\mathbf{GL} = \mathbf{K} + (\mathsf{A}^{\Box}_{\mathbf{L}}), & \mathbf{Grz} = \mathbf{K} + (\mathsf{A}^{\Box}_{\mathbf{G}}).
\end{array}$$

Далее, для $\mathbf{\Sigma} \subseteq \{\mathbf{D}, \mathbf{4}, \mathbf{5}\}$ обозначим $\mathbf{K\Sigma} = \mathbf{K} + \{(\mathsf{A}^{\Box}_{\mathfrak{S}}) \mid \mathfrak{S} \in \mathbf{\Sigma}\}$. Решетка нормальных (непротиворечивых) логик имеет ровно две *максимальные* логики (см. [15][15]), а именно $\mathbf{Ver} = \mathbf{K} + \{\Box p\}$ и $\mathbf{Triv} = \mathbf{K} + \{\Box p \leftrightarrow p\}$.

Определение 2. *Оператором разрешимости* будем называть оператор, задаваемый формулой $\Box p \vee \Box\neg p$. Введем $\rhd$*-язык*, отличающийся от

[15] [15] D. Makinson, Some embedding theorems for modal logic, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 1971, 12(2):252–254.

$\Box$-языка лишь заменой символа $\Box$ на $\triangleright$. Определения *$\triangleright$-формулы* и *$\triangleright$-логики* формулируются аналогично приведенным выше. Зададим перевод $\mathsf{tr}\colon \mathbf{Fm}^{\triangleright} \to \mathbf{Fm}^{\Box}$, сохраняющий переменные и булевы связки и подчиняющийся равенству $\mathsf{tr}(\triangleright A) = \Box\mathsf{tr}(A) \vee \Box\neg\mathsf{tr}(A)$. *Логикой (оператора) разрешимости* над логикой L назовем множество $\triangleright$-формул, tr-переводы которых являются теоремами логики L:

$$L^{\triangleright} := \{A \in \mathbf{Fm}^{\triangleright} \mid \mathsf{tr}(A) \in L\} = \mathsf{tr}^{-1}(L).$$

Главы 2 и 3 посвящены вопросам аксиоматизации логик оператора разрешимости над логиками, не содержащими аксиомы рефлексивности, ввиду чего в них оператор $\Box$ не выражается через оператор $\triangleright$.

Во **второй главе** аксиоматизированы логики $\mathbf{K\Sigma}^{\triangleright}$, где $\mathbf{\Sigma} \subseteq \{\mathbf{D}, \mathbf{4}, \mathbf{5}\}$. Исчисление $\mathbf{K}^{\triangleright}$ имеет следующие аксиомы и правила (MP), (Sub) и (Dec):

$(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\top})$	классические тавтологии в $\triangleright$-языке		(Dec) $\dfrac{A}{\triangleright A}$
$(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\neg})$	$\triangleright p \leftrightarrow \triangleright\neg p$	(зеркальность)	
$(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\leftrightarrow})$	$\triangleright(p \leftrightarrow q) \to (\triangleright p \leftrightarrow \triangleright q)$	(замена эквивалентных)	
$(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\vee})$	$\triangleright p \to [\triangleright(q \to p) \vee \triangleright(p \to r)]$	(дихотомия)	

Для $\mathbf{\Sigma} \subseteq \{\mathbf{4}, \mathbf{5}\}$ строим исчисления $\mathbf{K\Sigma}^{\triangleright} = \mathbf{K}^{\triangleright} + \{(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathfrak{S}}) \mid \mathfrak{S} \in \mathbf{\Sigma}\}$, где:

$(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{4}})$	$\triangleright p \to \triangleright(q \to \triangleright p)$	(слабая транзитивность)
$(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{5}})$	$\neg\triangleright p \to \triangleright(q \to \neg\triangleright p)$	(слабая евклидовость)

В § 2.1 доказывается следующая теорема о полноте.

Теорема 1. *Для каждого подмножества $\mathbf{\Sigma} \subseteq \{\mathbf{4}, \mathbf{5}\}$ и любой $\triangleright$-формулы A эквивалентны следующие условия:*

(1) $\mathbf{K\Sigma}^{\triangleright} \vdash A$*;*

(2) $\mathbf{K\Sigma} \vdash \mathsf{tr}(A)$*;*

(3) *A общезначима на любой $\mathbf{K\Sigma}$-шкале.*

Для доказательства используется метод построения канонических моделей, приспособленный для применения к $\triangleright$-логикам в работах [6] и [7].

В § 2.2 мы устанавливаем, что логика $\mathbf{Ver}^{\triangleright} = \mathbf{K}^{\triangleright} + \{\triangleright p\}$ является наибольшим непротиворечивым расширением логики $\mathbf{K}^{\triangleright}$ (ср. [15]). Отсюда мы заключаем, что метод доказательства теоремы 1 не применим к $\Box$-логикам, содержащим аксиому сериальности $(\mathsf{A}^{\Box}_{\mathbf{D}})$, как показывает

Лемма 1. *Для любой непротиворечивой $\Box$-логики $L \supseteq \mathbf{D}$ каноническая шкала логики $L^{\triangleright}$ не является сериальной (то есть не обладает свойством $\forall w\ \exists x\ w{\uparrow}x$) и, следовательно, не является L-шкалой.*

$$(\Rightarrow^{\triangleright}_{\vee})\ \frac{\Pi \Rightarrow \Sigma, \triangleright A}{\Pi \Rightarrow \Sigma, \triangleright(B \to A), \triangleright(A \to C)} \qquad (\Rightarrow^{\triangleright}_{\leftrightarrow})\ \frac{\Pi, A \Rightarrow B, \Sigma \quad \Pi, B \Rightarrow A, \Sigma}{\Pi, \triangleright A \Rightarrow \triangleright B, \Sigma}$$

$$(^{\triangleright}_{\neg}\Rightarrow)\ \frac{\triangleright A, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\triangleright\neg A, \Pi \Rightarrow \Sigma} \qquad (\Rightarrow^{\triangleright}_{\neg})\ \frac{\Pi \Rightarrow \Sigma, \triangleright A}{\Pi \Rightarrow \Sigma, \triangleright\neg A} \qquad (\Rightarrow^{\triangleright}_{\mathbf{K}})\ \frac{\Pi \Rightarrow A}{\triangleright(\Pi \vee A) \Rightarrow \triangleright A}$$

$$(\Rightarrow^{\triangleright}_{\mathbf{K4}})\ \frac{\Pi, \triangleright\Sigma \Rightarrow A}{\triangleright(\Pi \vee A), \triangleright\Sigma \Rightarrow \triangleright A} \qquad (\Rightarrow^{\triangleright}_{\mathbf{GL}})\ \frac{\triangleright A, \Pi, \triangleright\Sigma \Rightarrow A}{\triangleright(\Pi \vee A), \triangleright\Sigma \Rightarrow \triangleright A}$$

Рис. 2. Правила для исчислений $L^{\triangleright}$.

Пусть $F = (W, \uparrow)$ — шкала Крипке. Обозначим шкалу $\widehat{F} := (W, \Uparrow)$, где $\Uparrow := \uparrow \cup \{\langle w, w\rangle \mid \neg\exists x\colon\ w{\uparrow}x\}$. Далее для класса шкал $\mathcal{F}$ обозначим: $\widehat{\mathcal{F}} := \{\widehat{F} \mid F \in \mathcal{F}\}$. Следующее утверждение позволяет для некоторых логик L, содержащих аксиому сериальности, находить аксиоматику логики разрешимости над L.

Теорема 2. *Пусть $\Box$-логика L полна относительно класса шкал $\mathcal{F}$, и пусть $L\mathbf{D}$ обозначает наименьшую логику, содержащую L и аксиому сериальности $(\mathsf{A}^{\Box}_{\mathbf{D}})$. Если $\widehat{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{F}$, то $L\mathbf{D}^{\triangleright} = L^{\triangleright}$.*

В частности, мы получаем аксиоматику логики эпистемической разрешимости: $\mathbf{KD45}^{\triangleright} = \mathbf{K45}^{\triangleright}$.

В **третьей главе** построена гильбертовская аксиоматика логики, полной при интерпретации формул вида $\triangleright A$ как 'арифметический перевод утверждения A разрешим в арифметике Пеано **PA**', т. е. логики разрешимости над логикой Гёделя–Лёба **GL**: $\mathbf{GL}^{\triangleright} = \mathbf{K4}^{\triangleright} + (\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{L}})$, где аксиома $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{L}})$ есть $\triangleright(\triangleright p \to p) \to \triangleright p$. Кроме того, для логики разрешимости над $L \in \{\mathbf{K}, \mathbf{K4}, \mathbf{GL}\}$ построено секвенциальное исчисление $[L^{\triangleright}]$ путем добавления к секвенциальному исчислению высказываний (с сечением) правил $(^{\triangleright}_{\neg}\Rightarrow)$, $(\Rightarrow^{\triangleright}_{\neg})$, $(\Rightarrow^{\triangleright}_{\vee})$, $(\Rightarrow^{\triangleright}_{\leftrightarrow})$ и $(\Rightarrow^{\triangleright}_{L})$, представленных на рис. 2. При формулировке правил $(\Rightarrow^{\triangleright}_{L})$ используется обозначение: $(\Pi \vee A) := \{(\pi \vee A) \mid \pi \in \Pi\}$. Основной результат третьей главы звучит следующим образом.

Теорема 3. *Для каждой логики $L \in \{\mathbf{K}, \mathbf{K4}, \mathbf{GL}\}$ и любой секвенции $\Pi \Rightarrow \Sigma$ в $\triangleright$-языке эквивалентны следующие утверждения:*

(1) $[L^{\triangleright}] \vdash \Pi \Rightarrow \Sigma$,

(2) $L^{\triangleright} \vdash \bigwedge\Pi \to \bigvee\Sigma$,

(3) $L \vdash \mathsf{tr}(\bigwedge\Pi \to \bigvee\Sigma)$,

(4) $F \models \Pi \Rightarrow \Sigma$ *для любой конечной L-шкалы F.*

Четвертая глава посвящена изучению логик оператора разрешимости над $\Box$-логиками, содержащими аксиому рефлексивности $\Box p \to p$. Ввиду выразимости оператора $\Box$ через $\rhd$ посредством равенства $\Box p = p \,\&\, \rhd p$ построение гильбертовских аксиоматик данных логик разрешимости становится автоматическим (см. лемму 2 ниже) и потому не представляет большого интереса. Напротив, построение секвенциальных исчислений для этих логик, обладающих „хорошими“ структурными свойствами (устранимость сечения, свойство подформульности и т. п.), имеет определенный смысл.

В § 4.1 представлены системы гильбертовского типа $L^{\rhd}$ и секвенциальные исчисления $[L_1^{\rhd}]$ и $[L_2^{\rhd}]$ для логик разрешимости над $L \in \{\mathbf{T}, \mathbf{S4}, \mathbf{B}, \mathbf{S5}, \mathbf{Grz}\}$ (исчисления $\mathbf{T}^{\rhd}$, $\mathbf{S4}^{\rhd}$ и $\mathbf{S5}^{\rhd}$ известны из [1], [2]). Исчисление $\mathbf{T}^{\rhd}$ задается правилами (MP), (Sub), (Dec) и аксиомами $(\mathsf{A}_{\top}^{\rhd})$, $(\mathsf{A}_{\neg}^{\rhd})$ и

$$(\mathsf{A}_{\mathbf{T}}^{\rhd})\ p \to [\rhd(p \to q) \to (\rhd p \to \rhd q)] \quad \text{(слабая дистрибутивность)}$$

Аксиоматика других рефлексивных логик разрешимости:

$$\begin{array}{rll}
\mathbf{B}^{\rhd} = & \mathbf{T}^{\rhd} + (\mathsf{A}_{\mathbf{B}}^{\rhd}), & (\mathsf{A}_{\mathbf{B}}^{\rhd}) \quad p \to \rhd(\rhd p \to p) \\
\mathbf{S4}^{\rhd} = & \mathbf{T}^{\rhd} + (\mathsf{A}_{\mathbf{4}\flat}^{\rhd}), & (\mathsf{A}_{\mathbf{4}\flat}^{\rhd}) \quad \rhd p \to \rhd\rhd p \\
\mathbf{S5}^{\rhd} = & \mathbf{T}^{\rhd} + (\mathsf{A}_{\mathbf{5}\flat}^{\rhd}), & (\mathsf{A}_{\mathbf{5}\flat}^{\rhd}) \quad \rhd\rhd p \\
\mathbf{S5}^{\rhd} = & \mathbf{T}^{\rhd} + (\mathsf{A}_{\mathbf{5}'}^{\rhd}), & (\mathsf{A}_{\mathbf{5}'}^{\rhd}) \quad \rhd(\rhd p \to p) \\
\mathbf{Grz}^{\rhd} = & \mathbf{S4}^{\rhd} + (\mathsf{A}_{\mathbf{G}}^{\rhd}). & (\mathsf{A}_{\mathbf{G}}^{\rhd}) \quad \rhd(\rhd(p \to \rhd p) \to p) \to \rhd p
\end{array}$$

Исчисление $[L_1^{\rhd}]$ получается добавлением к секвенциальному исчислению высказываний (с сечением) правил $(\overset{\rhd}{\neg}\Rightarrow)$, $(\Rightarrow_{\neg}^{\rhd})$ (см. рис. 2) и правил $(\Rightarrow_{L}^{\rhd})$, выписанных на рис. 3. При формулировке правила $(\Rightarrow_{\mathbf{B}}^{\rhd})$ использовано обозначение $(\rhd\Sigma \,\&\, \Sigma) := \{(\rhd\sigma \,\&\, \sigma) \mid \sigma \in \Sigma\}$. Обозначение $(\rhd\Sigma \to \Sigma)$ ниже имеет аналогичный смысл.

$$(\Rightarrow_{\mathbf{T}}^{\rhd})\ \frac{\Pi \Rightarrow A}{\Pi, \rhd\Pi \Rightarrow \rhd A} \quad (\Rightarrow_{\mathbf{S4}}^{\rhd})\ \frac{\Pi, \rhd\Pi \Rightarrow A}{\Pi, \rhd\Pi \Rightarrow \rhd A} \quad (\Rightarrow_{\mathbf{S5}}^{\rhd})\ \frac{\Pi, \rhd\Pi \Rightarrow \rhd\Sigma, A}{\Pi, \rhd\Pi \Rightarrow \rhd\Sigma, \rhd A}$$

$$(\Rightarrow_{\mathbf{B}}^{\rhd})\ \frac{\Pi \Rightarrow (\rhd\Sigma \,\&\, \Sigma), A}{\Pi, \rhd\Pi \Rightarrow \Sigma, \rhd A} \qquad (\Rightarrow_{\mathbf{Grz}}^{\rhd})\ \frac{\rhd(A \to \rhd A), \Pi, \rhd\Pi \Rightarrow A}{\Pi, \rhd\Pi \Rightarrow \rhd A}$$

Рис. 3. Правила исчислений $[L_1^{\rhd}]$.

Определение 3. Секвенциальное исчисление обладает *свойством подформульности*, если всякая выводимая в нем секвенция $\Pi \Rightarrow \Sigma$ имеет вывод, все секвенции которого состоят из подформул формул из $\Pi \cup \Sigma$.

Заметим, что правила $(\overset{\triangleright}{\neg}\Rightarrow)$ и $(\Rightarrow\overset{\triangleright}{\neg})$ нарушают свойство подформульности. Поэтому далее мы строим исчисление $[L^{\triangleright}_2]$, в котором данные правила поглощены другими. Это исчисление получается добавлением к секвенциальному исчислению высказываний (с сечением) правил $(\Rightarrow^{\triangleright r}_{L})$, $r \in \{0,1\}$, указанных на рис. 4; при их формулировке используются обозначения: $\overline{r} := 1 - r$, $A^0 := \varnothing$, $A^1 := A$.

$$(\Rightarrow^{\triangleright r}_{\mathbf{T}})\ \frac{A^{\overline{r}}, \Pi \Rightarrow \Lambda, A^r}{\Pi, \triangleright(\Pi\Lambda) \Rightarrow \Lambda, \triangleright A}$$

$$(\Rightarrow^{\triangleright r}_{\mathbf{S4}})\ \frac{A^{\overline{r}}, \Pi, \triangleright(\Pi\Lambda) \Rightarrow \Lambda, A^r}{\Pi, \triangleright(\Pi\Lambda) \Rightarrow \Lambda, \triangleright A}$$

$$(\Rightarrow^{\triangleright r}_{\mathbf{B}})\ \frac{\{A^{\overline{r}}, \Pi, \Phi' \Rightarrow \Phi, \triangleright(\Psi'\Psi), \Lambda, A^r\}^{\Sigma=\Phi\Psi}_{\Sigma'=\Phi'\Psi'}}{\Pi, \triangleright(\Pi\Lambda), \Sigma' \Rightarrow \Sigma, \Lambda, \triangleright A}$$

$$(\Rightarrow^{\triangleright r}_{\mathbf{S5}})\ \frac{A^{\overline{r}}, \Pi, \triangleright(\Pi\Lambda) \Rightarrow \Lambda, \triangleright\Sigma, A^r}{\Pi, \triangleright(\Pi\Lambda) \Rightarrow \Lambda, \triangleright\Sigma, \triangleright A}$$

$$(\Rightarrow^{\triangleright 0}_{\mathbf{Grz}})\ \frac{A, \triangleright(A \vee \triangleright A), \Pi, \triangleright(\Pi\Lambda) \Rightarrow \Lambda}{\Pi, \triangleright(\Pi\Lambda) \Rightarrow \Lambda, \triangleright A}$$

$$(\Rightarrow^{\triangleright 1}_{\mathbf{Grz}})\ \frac{\triangleright(A \to \triangleright A), \Pi, \triangleright(\Pi\Lambda) \Rightarrow \Lambda, A}{\Pi, \triangleright(\Pi\Lambda) \Rightarrow \Lambda, \triangleright A}$$

Рис. 4. Правила исчислений $[L^{\triangleright}_2]$.

Обозначим через $[L^{\triangleright}_2]^-$ исчисления, полученные из $[L^{\triangleright}_2]$ заменой правила сечения на *аналитическое* сечение (сохраняющее свойство подформульности):

$$\frac{\Pi \Rightarrow \Sigma, A \quad A, \Pi' \Rightarrow \Sigma'}{\Pi\Pi' \Rightarrow \Sigma\Sigma'}, \quad A \in \mathrm{Sb}(\Pi\Pi'\Sigma\Sigma').$$

В § 4.2 описывается метод доказательства полноты логик в $\triangleright$-языке, заданных в виде секвенциального исчисления с аналитическим сечением. Доказательству полноты построенных аксиоматик посвящен § 4.3.

Теорема 4. *Для каждой логики $L \in \{\mathbf{T}, \mathbf{S4}, \mathbf{B}, \mathbf{S5}, \mathbf{Grz}\}$ и любой секвенции $\Pi \Rightarrow \Sigma$ в $\triangleright$-языке эквивалентны следующие утверждения:*

(1) $[L^{\triangleright}_2]^- \vdash \Pi \Rightarrow \Sigma$,

(2) $[L^{\triangleright}_1] \vdash \Pi \Rightarrow \Sigma$,

(3) $L^{\triangleright} \vdash \bigwedge\Pi \to \bigvee\Sigma$,

(4) $L \vdash \mathsf{tr}(\bigwedge\Pi \to \bigvee\Sigma)$,

(5) $F \models \Pi \Rightarrow \Sigma$ *для любой конечной L-шкалы F.*

Следствие 1. **(а)** *Исчисления* $[\mathbf{T}_2^{\triangleright}]$, $[\mathbf{S4}_2^{\triangleright}]$ *и* $[\mathbf{S5}_2^{\triangleright}]$ *обладают свойством подформульности.*

(б) *Исчисление* $[\mathbf{Grz}_2^{\triangleright}]$ *обладает слабым свойством подформульности: всякая выводимая секвенция* $\Pi \Rightarrow \Sigma$ *имеет вывод, состоящий из секвенций вида* $\Gamma \Rightarrow \Delta$, *где* $\Delta \subseteq \mathrm{Sb}\,\Pi\Sigma$ *и*

$$\Gamma \subseteq \mathrm{Sb}(\Pi\Sigma \cup \{\triangleright(A \to \triangleright A), \triangleright(A \vee \triangleright A) \mid \triangleright A \in \mathrm{Sb}\,\Pi\Sigma\}).$$

Остается открытым вопрос о свойстве подформульности для исчисления $[\mathbf{B}_2^{\triangleright}]$; он сводится к вопросу о том, можно ли ограничиться такими применениями правил $(\Rightarrow_{\mathbf{B}}^{\triangleright r})$, в которых $\Sigma\Sigma' \subseteq \mathrm{Sb}(\Pi\Lambda A)$.

В § 4.4 описан универсальный метод построения и доказательства полноты аксиоматики для рефлексивных логик разрешимости, использующий упомянутую выше выразимость $\Box$ через $\triangleright$. С этой целью вводится перевод $\mathsf{Tr}\colon \mathbf{Fm}^{\Box} \to \mathbf{Fm}^{\triangleright}$, сохраняющий переменные и булевы связки подчиняющийся равенству $\mathsf{Tr}(\Box A) = \mathsf{Tr}(A) \mathbin{\&} \triangleright \mathsf{Tr}(A)$.

Лемма 2. *Пусть нормальная логика* L *аксиоматизирована над* $\mathbf{T}$ *множеством аксиом* $\Gamma \subseteq \mathbf{Fm}^{\Box}$. *Тогда логика разрешимости над* L *имеет следующую аксиоматику:* $L^{\triangleright} = \mathbf{T}^{\triangleright} + \mathsf{Tr}(\Gamma)$, *где* $\mathsf{Tr}(\Gamma) := \{\mathsf{Tr}(A) \mid A \in \Gamma\}$.

Применяя этот метод к логике **S4.1** и несколько упрощая „ответ“, получаем следующую аксиоматику: $\mathbf{S4.1}^{\triangleright} = \mathbf{S4}^{\triangleright} + (\mathsf{A}_1^{\triangleright})$, где дополнительная аксиома $(\mathsf{A}_1^{\triangleright})$ есть $\triangleright\triangleright p \to \triangleright p$.

В § 4.5 доказано, что в секвенциальных исчислениях $[L_1^{\triangleright}]$ и $[L_2^{\triangleright}]$ сечение не устранимо, а также установлено интерполяционное свойство Крейга для построенных в § 4.1 логик $L^{\triangleright}$.

Логики доказательств с операторами $\Box A$ и $\Box_p A$, интерпретируемыми как 'A доказуемо' и 'p есть (код) доказательства A', построены в работе [16][16]. Соответствующие им логики доказательств с оператором „сильной доказуемости“ $\boxdot A = A \mathbin{\&} \Box A$ аксиоматизированы в [17][17]. В заключительном § 4.6 четвертой главы мы строим аксиоматику логик доказательств с оператором „сильной разрешимости“ $\triangleright A = \boxdot A \vee \boxdot \neg A$.

Язык логик доказательств, построенных в [16], содержит переменные по высказываниям $\mathrm{SV} = \{S_0, S_1, \ldots\}$ и по доказательствам $\mathrm{PV} = \{p_0, p_1, \ldots\}$, символы $\bot$, $\to$, $\Box$ и для каждой $p \in \mathrm{PV}$ оператор $\Box_p$ (помеченная модальность). Схема построения множества $\mathbf{Fm}_p^{\Box}$ формул этого языка следующая:

$$\bot \parallel S_i \parallel A \to B \parallel \Box A \parallel \Box_p A.$$

[16] [16] S. Artёmov, Logic of Proofs, *Annals of Pure and Applied Logic*, vol. 67 (1994), pp. 29–59.

[17] [17] E. Nogina, Logic of Proofs with Strong Provability Operator. International Conference on Proof Theory, Provability Logic and Computation (PPC'94), Berne, Switzeland, 1994, pp. 1–22.

Аксиоматика базовой логики: $\mathcal{B}\mathbf{Grz} = \mathbf{Grz} + (\mathsf{A}^{\Box}_{qr}) + (\mathsf{A}^{\Box}_{qs+}) + (\mathsf{A}^{\Box}_{qs-})$, где

$$\begin{array}{lll} (\mathsf{A}^{\Box}_{qr}) & \Box_p A \to A & \text{(квази-рефлексивность)} \\ (\mathsf{A}^{\Box}_{qs+}) & \Box_p A \to \Box\Box_p A & \text{(квази-стабильность)} \\ (\mathsf{A}^{\Box}_{qs-}) & \neg\Box_p A \to \Box\neg\Box_p A & \text{(квази-стабильность)} \end{array}$$

Аксиоматика функциональной и гёделевской логик доказательств: $\mathcal{F}\mathbf{Grz} = \mathcal{B}\mathbf{Grz} + (\mathsf{A}^{\Box}_{f})$, $\mathcal{M}\mathbf{Grz} = \mathcal{F}\mathbf{Grz}^{\rhd} + (\mathsf{A}^{\Box}_{m})$, где

$$\begin{array}{ll} (\mathsf{A}^{\Box}_{f}) & \Box_p A \,\&\, \Box_p B \to (C \to D), \text{ если } C = D \pmod{A = B}, \\ & \text{(аксиома функциональности)} \\ (\mathsf{A}^{\Box}_{m}) & \neg[\Box_{q_1} A_2(q_2) \,\&\, \Box_{q_2} A_3(q_3) \,\&\, \ldots \,\&\, \Box_{q_n} A_1(q_1)], \\ & \text{где } n \geqslant 1,\ q_i \in \mathrm{PV}, \text{ формула } A_i(q_i) \text{ содержит } q_i, \\ & \text{(аксиома монотонности)} \end{array}$$

а отношение $C = D \pmod{A = B}$ на формулах этого языка, введенное в [16], означает: для любой подстановки θ $(A\theta \equiv B\theta \Longrightarrow C\theta \equiv D\theta)$.

Далее, вводим язык $\mathbf{Fm}^{\rhd}_p$, отличающийся от $\mathbf{Fm}^{\Box}_p$ лишь заменой символа $\Box$ на $\rhd$. Теперь сформулируем нашу аксиоматику логик доказательств с оператором сильной разрешимости. Аксиоматика базовой логики: $\mathcal{B}\mathbf{Grz}^{\rhd} = \mathbf{Grz}^{\rhd} + (\mathsf{A}^{\rhd}_{qr}) + (\mathsf{A}^{\rhd}_{qd})$, где

$$\begin{array}{lll} (\mathsf{A}^{\rhd}_{qr}) & \Box_p A \to A & \text{(квази-рефлексивность)} \\ (\mathsf{A}^{\rhd}_{qd}) & \rhd\Box_p A & \text{(квази-разрешимость)} \end{array}$$

Аксиоматика функциональной и гёделевской логик доказательств: $\mathcal{F}\mathbf{Grz}^{\rhd} = \mathcal{B}\mathbf{Grz}^{\rhd} + (\mathsf{A}^{\rhd}_{f})$, $\mathcal{M}\mathbf{Grz}^{\rhd} = \mathcal{F}\mathbf{Grz}^{\rhd} + (\mathsf{A}^{\rhd}_{m})$, где аксиомы $(\mathsf{A}^{\rhd}_{f})$ и $(\mathsf{A}^{\rhd}_{m})$ формулируются аналогично аксиомам $(\mathsf{A}^{\Box}_{f})$ и $(\mathsf{A}^{\Box}_{m})$, но уже в языке $\mathbf{Fm}^{\rhd}_p$. Арифметическая полнота построенных систем вытекает непосредственно из следующей теоремы.

Теорема 5. *Для каждой $\mathcal{L} \in \{\mathcal{B},\ \mathcal{F},\ \mathcal{M}\}$ и любой формулы $A \in \mathbf{Fm}^{\rhd}_p$ справедлива эквивалентность: $\mathcal{L}\mathbf{Grz}^{\rhd} \vdash A \iff \mathcal{L}\mathbf{Grz} \vdash \mathsf{tr}(A)$.*

Обозначим через $\mathrm{SV}(A)$ и $\mathrm{PV}(A)$ множества переменных по высказываниям и переменных по доказательствам, входящих в формулу A, а также $\mathrm{Var}\,A := \mathrm{SV}(A) \cup \mathrm{PV}(A)$.

Определение 4. Логика L (в языке $\mathbf{Fm}^{\Box}_p$ или $\mathbf{Fm}^{\rhd}_p$) обладает *слабым* (*сильным*) *интерполяционным свойством Крейга*, если из $L \vdash A \to C$ следует существование такой формулы B, что $L \vdash A \to B$, $L \vdash B \to C$ и $\mathrm{SV}(B) \subseteq \mathrm{SV}(A) \cap \mathrm{SV}(C)$ (соотв. $\mathrm{Var}\,B \subseteq \mathrm{Var}\,A \cap \mathrm{Var}\,C$).

Лемма 3. *Логика* $\mathcal{B}\mathbf{Grz}^{\triangleright}$ *обладает сильным, а логики* $\mathcal{F}\mathbf{Grz}^{\triangleright}$ *и* $\mathcal{M}\mathbf{Grz}^{\triangleright}$ *не обладают даже слабым интерполяционным свойством Крейга.*

Пятая глава посвящена вопросам выразимости свойств шкал Крипке формулами $\triangleright$-языка. В § 5.1 мы указываем „верхнюю границу“ выразительных возможностей $\triangleright$-языка (см. теорему 6 ниже).

Определение 5. Класс шкал $\mathcal{G}$ назовем $\Box$-*определимым* (в классе $\mathcal{F}$), если $\exists\Gamma \subseteq \mathbf{Fm}^{\Box}$ $\forall F$ (соотв. $\forall F \in \mathcal{F}$): $F \in \mathcal{G} \Leftrightarrow F \models \Gamma$. Свойство шкал $\Box$-*выразимо*, если $\Box$-определим класс шкал, обладающих этим свойством. Для $\triangleright$-языка определения даются аналогично.

Теорема 6. *Всякий непустой* $\triangleright$*-определимый класс шкал Крипке содержит класс функциональных шкал.*

Следствие 2. *Классы рефлексивных, сериальных, транзитивных, симметричных, евклидовых шкал, а также любые их подклассы не являются* $\triangleright$*-определимыми.*

Данное следствие частично (для первых пяти классов) было получено в работе [6] из несколько других соображений.

В § 5.2 мы предъявляем формулы первого порядка, задающие те же классы шкал Крипке, что и $\triangleright$-аксиомы некоторых рассмотренных выше логик разрешимости.

Определение 6. Точку w шкалы $F = \langle W, \uparrow\rangle$ назовем *функциональной*, если из нее достижимо не более одной точки; это свойство выражается формулой первого порядка: $Fnc(w) \leftrightharpoons \forall x, y{\downarrow}w\ (x = y)$. Точку w, не являющуюся функциональной, будем называть *ветвящейся* и этот факт будем записывать посредством $Bra(w)$. Введем обозначения для ограниченных кванторов по ветвящимся точкам и по ветвящимся точкам, достижимым из точки w:

$$\begin{array}{rcl}
\widehat{\forall} w\ \varphi(w) & \leftrightharpoons & \forall w\ [Bra(w) \to \varphi(w)];\\
\widehat{\exists} w\ \varphi(w) & \leftrightharpoons & \exists w\ [Bra(w) \land \varphi(w)];\\
\widehat{\forall} x{\downarrow}w\ \varphi(x) & \leftrightharpoons & \widehat{\forall} x\ [w{\uparrow}x \to \varphi(x)];\\
\widehat{\exists} x{\downarrow}w\ \varphi(x) & \leftrightharpoons & \widehat{\exists} x\ [w{\uparrow}x \land \varphi(x)].
\end{array}$$

Известно (см. [6]), что формула $\triangleright p$ определяет класс функциональных шкал, т. е. задаваемых условием $\widehat{\forall} w \bot$. Формулируемая ниже теорема утверждает, что аксиомы $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{T}})$, $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{4}})$, $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{4}\flat})$, $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{5}})$, $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{5}\flat})$ и $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{5}'})$ определяют классы шкал, задаваемые следующими (соответствующими) формулами первого порядка (фигурные скобки означают конъюнкцию заключенных в них формул; $w{\uparrow} := \{x \mid w{\uparrow}x\}$; запись $x{\uparrow} \cap w{\uparrow}$ означает, что множества $x\uparrow$ и $w\uparrow$ пересекаются):

$$
\begin{array}{ll}
(\varphi^{\triangleright}_{\mathbf{T}}) & \widehat{\forall} w \quad w{\uparrow}w \\
(\varphi^{\triangleright}_{\mathbf{4}}) & \widehat{\forall} w\ \widehat{\forall} x{\downarrow}w\ \forall y{\downarrow}x \quad w{\uparrow}y \\
(\varphi^{\triangleright}_{\mathbf{4}\flat}) & \widehat{\forall} w \left[\widehat{\forall} x{\downarrow}w\ (x\uparrow \subseteq w\uparrow) \vee \forall x,y{\downarrow}w \begin{Bmatrix} x\uparrow \setminus w\uparrow \ = \ y\uparrow \setminus w\uparrow \\ x\uparrow \cap w\uparrow \Leftrightarrow y\uparrow \cap w\uparrow \end{Bmatrix}\right] \\
(\varphi^{\triangleright}_{\mathbf{5}}) & \widehat{\forall} w\ \forall x,y{\downarrow}w \quad x{\uparrow}y \\
(\varphi^{\triangleright}_{\mathbf{5}\flat}) & \widehat{\forall} w\ [\widehat{\exists} x{\downarrow}w \to \forall x,y{\downarrow}w\ (x\uparrow = y\uparrow)] \\
(\varphi^{\triangleright}_{\mathbf{5}'}) & \widehat{\forall} w\ \forall x,y{\downarrow}w \quad x{\uparrow}y
\end{array}
$$

Теорема 7. $F \models (\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathfrak{S}}) \Leftrightarrow F \models (\varphi^{\triangleright}_{\mathfrak{S}})$, *для каждого* $\mathfrak{S} \in \{\mathbf{T}, \mathbf{4}, \mathbf{4}\flat, \mathbf{5}, \mathbf{5}\flat, \mathbf{5}'\}$ *и произвольной шкалы* F.

Следствие 3. *Обозначим через* $\mathfrak{Func}$, $\mathfrak{Tran}$ *и* $\mathfrak{Eucl}$ *классы функциональных, транзитивных и евклидовых шкал соответственно; через* $\mathcal{F}(A)$ *— класс шкал, на которых общезначима формула* A. *Справедливы следующие строгие включения классов шкал. Все остальные включения между этими классами вытекают из указанных на диаграмме.*

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathfrak{Tran} \subset & \mathcal{F}(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{4}}) & \subset & \mathcal{F}(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{4}\flat}) \\
& \cup & & \cup \\
& \mathfrak{Func} & & \mathcal{F}(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{5}\flat}) \\
& \cap & & \cup \\
\mathfrak{Eucl} \subset & \mathcal{F}(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{5}}) & = & \mathcal{F}(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{5}'})
\end{array}
$$

Теорема 8.
(1) *В классе рефлексивных шкал:*
- **(а)** *аксиома* $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{B}})$ *выражает симметричность;*
- **(б)** *каждая из аксиом* $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{4}})$, $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{4}\flat})$ *выражает транзитивность;*
- **(в)** *каждая из аксиом* $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{5}})$, $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{5}\flat})$ *и* $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{5}'})$ *выражает евклидовость.*

(2) *В классе рефлексивных транзитивных шкал:*
- **(г)** *аксиома* $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{G}})$ *выражает слабую обратную фундированность;*
- **(д)** *аксиома* $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{1}})$ *выражает свойство Маккинси.*

В § 5.3 изучается инфинитарный оператор $\boxtimes$ "слабой необходимости", возникший в главе 2 в ходе доказательства теоремы 1:

$$\boxtimes A = \bigwedge_{B \in \mathbf{Fm}^{\triangleright}} \triangleright(B \to A).$$

Устанавлено, что логика $L^{\boxtimes}$ этого оператора над любой нормальной логикой L является нормальной, и более того, для $L \in \{\mathbf{K}, \mathbf{K4}, \mathbf{K5}, \mathbf{K45}, \mathbf{GL}\}$ имеет место включение $L^{\boxtimes} \supseteq L$ (с точностью до замены $\boxtimes$ на $\Box$).

В следующем § 5.4 мы устанавливаем „верхнюю границу" выразительных возможностей $\boxtimes$-языка, аналогичную найденной в теореме 6 из § 5.2:

всякий непустой $\boxtimes$-определимый класс шкал Крипке содержит класс функциональных шкал. Высказывается гипотеза о совпадении выразительных возможностей $\rhd$- и $\boxtimes$-языков.

Наконец, в заключительном § 5.5 мы устанавливаем, что классы шкал, определяемые $\boxtimes$-формулами:

$$(\mathsf{A}_{\mathbf{4}}^{\boxtimes}) \qquad \boxtimes p \to \boxtimes \boxtimes p$$
$$(\mathsf{A}_{\mathbf{5}}^{\boxtimes}) \qquad \neg \boxtimes p \to \boxtimes \neg \boxtimes p$$

задаются теми же условиями $(\varphi_{\mathbf{4}}^{\rhd})$ и $(\varphi_{\mathbf{5}}^{\rhd})$ первого порядка, что и соответствующие $\rhd$-формулы (см. теорему 7). Кроме того, обе “аксиомы Лёба”

$$(\mathsf{A}_{\mathbf{L}}^{\rhd}) \qquad \rhd(\rhd p \to p) \to \rhd p$$
$$(\mathsf{A}_{\mathbf{L}}^{\boxtimes}) \qquad \boxtimes(\boxtimes p \to p) \to \boxtimes p$$

отвечают одному и тому же условию второго порядка $(\varphi_{\mathbf{4}}^{\rhd})$ & $(\varphi_{\mathbf{L}}^{\rhd})$, где $(\varphi_{\mathbf{L}}^{\rhd})$ есть условие отсутствия бесконечных возрастающих цепей из ветвящихся точек. Таким образом, по своим свойствам оператор слабой необходимости $\boxtimes$ имеет ряд сходств как с оператором необходимости $\Box$, так и с оператором необходимости $\rhd$.

Задача нахождения логики оператора $\boxtimes$ над той или иной логикой L, на первый взгляд, стоит в стороне от вопросов исследования логик разрешимости; однако, она имеет философский аспект. Так, если окажется, что $\mathbf{K}^{\boxtimes} = \mathbf{K}$, то данный результат будет означать, что, вопреки распространенному мнению (см., например, [6], [7]), оператор необходимости $\Box$ выражается через оператор разрешимости $\rhd$, хотя и в более широком смысле — в смысле множества модальных законов, которым подчиняется оператор необходимости. Исходя из уже полученных результатов, можно сказать, что (в этом же широком смысле) через оператор разрешимости выражается оператор *некоторой*, быть может, отличной от исходной, необходимости.

Автор выражает искреннюю благодарность профессору С. Н. Артёмову и профессору В. А. Успенскому за научное руководство в процессе работы над диссертацией, старшему научному сотруднику В. Б. Шехтману и доценту В. Н. Крупскому за интерес к работе и полезные обсуждения, доценту М. Р. Пентусу за поддержку при написании текста диссертации и ценные советы. Кроме того, хочется выразить огромную признательность всем сотрудникам кафедры математической логики и теории алгоритмов МГУ за теплое отношение и рабочую атмосферу, которая сложилась на кафедре.

[1] Е. Золин, Интерполяционное свойство Крейга в логиках доказательств с оператором сильной доказуемости, *Вестн. Моск. ун-та.* Серия 1. Математика. Механика. 1997, вып. 4, с. 53–55.

[2] Е. Золин, Секвенциальные рефлексивные логики разрешимости, *Мат. заметки*, 2002, т. 71, вып. 6, с. 798-814.

[3] Е. Золин, Секвенциальная логика арифметической разрешимости, *Вестн. Моск. ун-та.* Серия 1. Математика. Механика. 2001. № 6, с. 43–48.

[4] E. Zolin, Completeness and Definability in the Logic of Non-contingency, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 1999, vol. 40, № 4, pp. 533–547.

[5] E. Zolin, Infinitary Definability of Necessity in Terms of Contingency, Proceedings of ESSLLI Student Session. — Finland, Helsinki, 13–24 August 2001, pp. 310–319.