УДК 510.643

Линейные модальности в минимальной логике

Е. Е. Золин

В настоящей работе продолжается начатое в [1, 2] исследование выразительной силы пропозициональных модальных логик. Напомним необходимые определения.

Рассматривается пропозициональный модальный язык, алфавит которого содержит переменные $\mathbb{P} = \{p_0, p_1, \ldots\}$, булевы связки $\bot$ (ложь), $\to$ (импликация) и одноместный модальный оператор $\Box$. Остальные связки вводятся известными сокращениями, в частности $\neg A \leftrightharpoons A \to \bot$, $\Diamond A \leftrightharpoons \neg\Box\neg A$. Множество формул этого языка, определяемое стандартным образом, обозначим $\mathbf{Fm}$. *(Модальной) логикой* называется множество формул $L \subseteq \mathbf{Fm}$, содержащее классические тавтологии в описанном языке и замкнутое относительно правил modus ponens, подстановки и эквивалентной замены:

$$(\mathsf{MP})\ \frac{A \quad A \to B}{B}, \qquad (\mathsf{Sub})\ \frac{A}{A[B/p]}, \qquad (\mathsf{RE})\ \frac{A \leftrightarrow B}{\Box A \leftrightarrow \Box B}$$

(здесь $A[B/p]$ есть результат подстановки формулы B вместо всех вхождений переменной p в формулу A). Через $L + \Gamma$ будем обозначать наименьшую логику, содержащую логику L и множество формул Γ. В настоящей работе изучается минимальная модальная логика $\mathbf{E}$.

Модальностью называется произвольная формула $\nabla(p)$ языка $\mathbf{Fm}$ от одной переменной p. Формула вида ∇p, где ∇ есть конечная (возможно, пустая) последовательность символов $\neg$ и $\Box$, а также сама последовательность ∇ называется *линейной* модальностью. *Степень* линейной модальности — это число вхождений в нее символа $\Box$. Модальности, задаваемые формулами p и $\neg p$, будем обозначать символами $\circ$ и $\neg$ соответственно. Всякая модальность ∇ задает перевод формул $(\cdot)_\nabla \colon \mathbf{Fm} \to \mathbf{Fm}$, коммутирующий с булевыми связками и $(\Box A)_\nabla = \nabla(A_\nabla)$.

Далее формализуем понятие "множество законов, которым подчиняется модальность ∇ в логике L": *логикой модальности* ∇ *над* L назовем множество формул, ∇-переводы которых являются теоремами логики L:

$$L^\nabla := \{A \in \mathbf{Fm} \mid A_\nabla \in L\}.$$

Очевидно, что L^∇ есть действительно логика.

Выразительную силу логики L можно измерять числом $\alpha(L)$ (а также числом $\alpha^{\mathrm{lin}}(L)$ линейных) модальностей, логики которых над L попарно различны. Таким образом, при вычислении $\alpha(L)$ и $\alpha^{\mathrm{lin}}(L)$ модальности считаются различными, если они подчиняются разным законам в логике L. Если же различными считать модальности, не эквивалентные в L, то получим аналогичные характеристики $\varepsilon(L)$ и $\varepsilon^{\mathrm{lin}}(L)$ логики L. Непосредственно из определений вытекают неравенства $\alpha^{\mathrm{lin}}(L) \leqslant \alpha(L)$ и $\varepsilon^{\mathrm{lin}}(L) \leqslant \varepsilon(L)$. Легко видеть, что для любой логики L справедливы также неравенства $\alpha(L) \leqslant \varepsilon(L)$ и $\alpha^{\mathrm{lin}}(L) \leqslant \varepsilon^{\mathrm{lin}}(L)$.

В [3, с. 10] показано, что $\varepsilon^{\mathrm{lin}}(\mathbf{S4}) = 14$; в [2] установлены равенства $\alpha(\mathbf{S4}) = \infty$, $\alpha(\mathbf{GL}) = \infty$, $\alpha^{\mathrm{lin}}(\mathbf{GL}) = 7$, в то время как очевидны равенства $\varepsilon(\mathbf{GL}) = \varepsilon^{\mathrm{lin}}(\mathbf{GL}) = \infty$; в [1] получено равенство $\alpha^{\mathrm{lin}}(\mathbf{B}) = \infty$ (аксиоматику упомянутых логик можно найти, например, в [3]). Основным результатом настоящей работы является установление следующего факта: $\alpha^{\mathrm{lin}}(\mathbf{E}) = 3$. Для сравнения отметим очевидные равенства: $\alpha(\mathbf{E}) = \varepsilon(\mathbf{E}) = \varepsilon^{\mathrm{lin}}(\mathbf{E}) = \infty$.

Лемма 1. *Если $(L^{\nabla})^{\nabla} \subseteq L \subseteq L^{\nabla}$, то $L^{\nabla} = L$.*

Доказательство. Из включения $L \subseteq L^{\nabla}$ вытекает $L^{\nabla} \subseteq (L^{\nabla})^{\nabla}$, и цепочка включений замкнулась.

Следствие 1. *Логики модальностей $\neg\Box$, $\Box\neg$ и $\Diamond$ над $\mathbf{E}$ равны $\mathbf{E}$.*

Доказательство. Для каждой из этих модальностей ∇ имеет место выводимость $\mathbf{E} \vdash \Box p \leftrightarrow (\nabla p)_{\nabla}$, откуда следует включение $(\mathbf{E}^{\nabla})^{\nabla} \subseteq \mathbf{E}$ и тем самым применима предыдущая лемма.

Лемма 2. *Если $L \subseteq L^{\nabla}$ и $L^{\nabla} \vdash \Box p \leftrightarrow \nabla p$, то $L^{\nabla} = L + \{\Box p \leftrightarrow \nabla p\}$.*

Доказательство. Обозначим через M логику в правой части доказываемого равенства. Включение $L^{\nabla} \supseteq M$ очевидно. Далее, $M \vdash A \leftrightarrow A_{\nabla}$ для любой формулы A. Поэтому: $A \in L^{\nabla} \Rightarrow A_{\nabla} \in L \subseteq M \Rightarrow A_{\nabla} \in M \Leftrightarrow A \in M$. Следовательно, $L^{\nabla} \subseteq M$.

Следствие 2. *Если $\mathbf{E}^{\nabla} \vdash \Box p \leftrightarrow \nabla p$, то $\mathbf{E}^{\nabla} = \mathbf{E} + \{\Box p \leftrightarrow \nabla p\}$.*

Данное следствие позволяет найти аксиоматики логик многих модальностей над $\mathbf{E}$. Например, для модальности $\boxdot p = p \,\&\, \Box p$ получаем $\mathbf{E}^{\boxdot} = \mathbf{E} + \{\Box p \to p\}$, поскольку $\mathbf{E}^{\boxdot} \vdash \Box p \leftrightarrow \boxdot p$ и последняя формула эквивалентна в $\mathbf{E}$ формуле $\Box p \to p$. Менее тривиальный пример: пусть $\nabla p = ([p \,\&\, \Box p] \vee [\neg p \,\&\, \Box\neg p])$. Тогда $\mathbf{E}^{\nabla} \vdash \Box p \leftrightarrow \nabla p$, но поскольку формулы $\Box p \leftrightarrow \nabla p$ и $\Box p \leftrightarrow \Box\neg p$ выводимы друг из друга в логике $\mathbf{E}$, окончательно получаем $\mathbf{E}^{\nabla} = \mathbf{E} + \{\Box p \leftrightarrow \Box\neg p\}$. Аналогично, для модальности $\nabla p = ([p \,\&\, \Box p] \vee [\neg p \,\&\, \Diamond p])$ имеем $\mathbf{E}^{\nabla} = \mathbf{E} + \{\Box p \leftrightarrow \Diamond p\}$.

Напомним, что *(модальная) алгебра* — это пара $\mathcal{A} = \langle \mathcal{B}, \circ \rangle$, где $\mathcal{B}$ — булева алгебра, $\circ\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ — модальный оператор (т. е. произвольное отображение носителя B алгебры $\mathcal{B}$ в себя). *Оценкой* переменных на алгебре $\mathcal{A}$ называется отображение $v\colon \mathbb{P} \to B$. Оценка v однозначно поднимается до отображения $\overline{v}\colon \mathbf{Fm} \to B$ с помощью коммутирования с булевыми связками и правила $\overline{v}(\Box F) := \circ(\overline{v}(F))$. Формула A называется *истинной* в алгебре $\mathcal{A}$ при оценке v (это записывается как $\langle \mathcal{A}, v \rangle \models A$), если $\overline{v}(A) = \mathbf{1}$, где $\mathbf{1}$ есть единица алгебры $\mathcal{B}$. Формула A называется *общезначимой* на алгебре $\mathcal{A}$ (т. е. $\mathcal{A} \models A$), если она истинна в $\mathcal{A}$ при любой оценке. Теорема об алгебраической полноте логики $\mathbf{E}$ (см. [4, 5]) утверждает, что $\mathbf{E} \vdash A$ тогда и только тогда, когда формула A общезначима на любой алгебре. Двухэлементную булеву алгебру обозначим символом $\mathbf{2} := \{\bot, \top\}$.

Теорема. *Логика любой линейной модальности ∇ степени $n \geqslant 1$ над логикой $\mathbf{E}$ совпадает с $\mathbf{E}$, т. е. $\mathbf{E}^{\nabla} = \mathbf{E}$.*

Доказательство. Будем считать, что ∇ не содержит подпоследовательности $\neg\neg$. Далее, поскольку $\mathbf{E}^{\neg\Box} = \mathbf{E}$ по доказанному выше, не уменьшая общности, считаем, что модальность ∇ начинается с $\Box$, а не с $\neg$. Наконец, ввиду установленного ранее равенства $\mathbf{E}^{\Box\neg} = \mathbf{E}$ можно считать, что модальность ∇ позитивна, т. е. содержит четное число символов $\neg$. Итак, пусть ∇ имеет вид: $\nabla = \Delta_n \ldots \Delta_1$, где $\Delta_i \in \{\Box, \Box\neg\}$.

Предположим, что $\mathbf{E} \not\vdash A$. По теореме о полноте существуют алгебра $\mathcal{A} = \langle \mathcal{B}, \circ \rangle$ и оценка v, такие, что $\langle \mathcal{A}, v\rangle \not\models A$. Для доказательства теоремы достаточно построить алгебру $\mathcal{A}' = \langle \mathcal{B}', \bullet\rangle$ и оценку w, такие, что $\langle \mathcal{A}', w\rangle \not\models A_\nabla$.

Возьмем такое число m, что $2^m \geqslant 2n$. В кубе $\mathbf{2}^m$ выберем две непересекающиеся последовательности, каждая из которых состоит из n различных точек:

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{\boldsymbol{\sigma}_1 := \widetilde{\bot}, \boldsymbol{\sigma}_2, \dots, \boldsymbol{\sigma}_n\},\\ \Pi &= \{\boldsymbol{\pi}_1 := \widetilde{\top}, \boldsymbol{\pi}_2, \dots, \boldsymbol{\pi}_n\}, \end{aligned}$$

причем $\boldsymbol{\pi}_i = \neg\boldsymbol{\sigma}_i$ для $1 \leqslant i \leqslant n$. Здесь для $\tau \in \mathbf{2}$ через $\widetilde{\tau}$ обозначаем набор (длины, определяемой по контексту), все элементы которого равны τ.

Положим $\mathcal{B}' := \mathcal{B} \times \mathbf{2}^m$ (булевы операции на произведении алгебр определяются покомпонентно). Определим оператор $\bullet$ на $\mathcal{B}'$, положив для любых $a \in \mathcal{B}$ и $1 \leqslant i \leqslant n$

$$\bullet\langle a, \boldsymbol{\sigma}_i\rangle := \begin{cases} \langle a, \boldsymbol{\sigma}_{i+1}\rangle, & \text{если } i < n,\ \Delta_i = \Box;\\ \langle \circ a, \boldsymbol{\sigma}_1\rangle, & \text{если } i = n,\ \Delta_i = \Box;\\ \langle \neg a, \boldsymbol{\pi}_{i+1}\rangle, & \text{если } i < n,\ \Delta_i = \Box\neg;\\ \langle \circ\neg a, \boldsymbol{\pi}_1\rangle, & \text{если } i = n,\ \Delta_i = \Box\neg; \end{cases}$$

на элементах вида $\langle a, \boldsymbol{\pi}_i\rangle$ определим оператор $\bullet$ аналогично, поменяв местами σ и π; на остальных элементах алгебры $\mathcal{B}'$ пусть $\bullet$ действует, например, тождественно. Наконец, зададим на $\mathcal{B}'$ оценку переменных: $w(p) := \langle v(p), \widetilde{\bot}\rangle$.

Для дальнейшего удобно ввести на $\mathcal{B}'$ дополнительные операторы:

$$\star_i := \begin{cases} \bullet, & \text{если } \Delta_i = \Box;\\ \bullet\neg, & \text{если } \Delta_i = \Box\neg, \end{cases} \qquad \odot := \star_n \cdots \star_1 .$$

Очевидно, что $\overline{w}(\Delta_i F) = \star_i \overline{w}(F)$ и $\overline{w}(\nabla F) = \odot\overline{w}(F)$ для любой формулы F.

Лемма 3. *Для любых элементов $a \in \mathcal{B}$ и $\tau \in \mathbf{2}$ справедливо равенство*

$$\odot\langle a, \widetilde{\tau}\rangle = \langle \circ a, \widetilde{\tau}\rangle.$$

Доказательство. Из определения операторов $\star_i$ вытекает, что

$$\star_i\langle a, \boldsymbol{\sigma}_i\rangle = \begin{cases} \langle a, \boldsymbol{\sigma}_{i+1}\rangle, & \text{если } i < n;\\ \langle \circ a, \boldsymbol{\sigma}_1\rangle, & \text{если } i = n. \end{cases}$$

Действительно,

$$\text{в случае } \Delta_i = \Box \quad \text{имеем} \quad \star_i\langle a, \boldsymbol{\sigma}_i\rangle = \bullet\langle a, \boldsymbol{\sigma}_i\rangle = \begin{cases} \langle a, \boldsymbol{\sigma}_{i+1}\rangle, & \text{если } i < n;\\ \langle \circ a, \boldsymbol{\sigma}_1\rangle, & \text{если } i = n, \end{cases}$$

$$\text{в случае } \Delta_i = \Box\neg \text{ имеем} \quad \star_i\langle a, \boldsymbol{\sigma}_i\rangle = \bullet\neg\langle a, \boldsymbol{\sigma}_i\rangle = \bullet\langle \neg a, \boldsymbol{\pi}_i\rangle = \begin{cases} \langle a, \boldsymbol{\sigma}_{i+1}\rangle, & \text{если } i < n;\\ \langle \circ a, \boldsymbol{\sigma}_1\rangle, & \text{если } i = n. \end{cases}$$

Поэтому для $\tau = \bot$ имеем $\widetilde{\tau} = \boldsymbol{\sigma}_1$, и, следовательно,

$$\odot\langle a, \widetilde{\tau}\rangle = \star_n \dots \star_1 \langle a, \boldsymbol{\sigma}_1\rangle = \star_n \dots \star_2 \langle a, \boldsymbol{\sigma}_2\rangle = \dots = \star_n\langle a, \boldsymbol{\sigma}_n\rangle = \langle \circ a, \boldsymbol{\sigma}_1\rangle = \langle \circ a, \widetilde{\tau}\rangle.$$

Случай $\tau = \top$ рассматривается аналогично (с заменой $\boldsymbol{\sigma}$ на $\boldsymbol{\pi}$). Лемма доказана.

Лемма 4 (основная). *Для любой формулы F справедливо равенство: $\overline{w}(F_\nabla) = \langle \overline{v}(F), \widetilde{\tau} \rangle$, где $\tau = F_\bigcirc(\widetilde{\bot})$ есть результат подстановки $\bot$ вместо всех переменных в формулу, полученную из F стиранием всех символов $\Box$.*

Доказательство. Для $F \equiv p$ это верно по определению w. Для $F \equiv \bot$, с одной стороны, $\overline{w}(F_\nabla)$ есть (по определению $\overline{w}$) нуль алгебры $\mathcal{B}'$, т. е. $\langle \mathbf{0}, \widetilde{\bot} \rangle$, с другой стороны, $\overline{v}(F) = \mathbf{0}$ и $F_\bigcirc \equiv \bot$. Случай $F \equiv (G \to H)$ очевиден, ибо отображения $\overline{v}$, $\overline{w}$ и $\bigcirc$-перевод коммутируют с булевыми связками.

Пусть теперь $F \equiv \Box G$. По предположению индукции $\overline{w}(G_\nabla) = \langle a, \widetilde{\tau} \rangle$, где обозначено $a = \overline{v}(G)$ и $\tau = G_\bigcirc(\widetilde{\bot})$. Имеем $F_\bigcirc \equiv (\Box G)_\bigcirc \equiv G_\bigcirc$, кроме того $\overline{v}(F) = \circ a$, следовательно, по предыдущей лемме

$$\overline{w}(F_\nabla) = \overline{w}(\nabla G_\nabla) = \odot \overline{w}(G_\nabla) = \odot \langle a, \widetilde{\tau} \rangle = \langle \circ a, \widetilde{\tau} \rangle = \langle \overline{v}(F), \widetilde{\tau} \rangle.$$

Тем самым лемма доказана.

Наконец, так как по условию $\overline{v}(A) \neq \mathbf{1}$, то согласно основной лемме $\overline{w}(A_\nabla) = \langle \overline{v}(A), \widetilde{\tau} \rangle \neq \langle \mathbf{1}, \widetilde{\top} \rangle$, т. е. $\langle \mathcal{A}', w \rangle \not\models A_\nabla$. Теорема полностью доказана.

В заключение обсудим полученный результат и сформулируем две не доказанные пока гипотезы. Легко видеть, что функция $\varepsilon(\cdot)$ является *антимонотонной*: если $L \subseteq M$, то $\varepsilon(L) \geqslant \varepsilon(M)$. Аналогичное утверждение имеет место для $\varepsilon^{\mathrm{lin}}(\cdot)$. Установленный в настоящей работе результат $\alpha^{\mathrm{lin}}(\mathbf{E}) = 3$ в совокупности с известными фактами $\alpha^{\mathrm{lin}}(\mathbf{GL}) = 7$ и $\alpha^{\mathrm{lin}}(\mathbf{B}) = \infty$ опровергает антимонотонность функции $\alpha^{\mathrm{lin}}(\cdot)$.

Гипотеза 1. *Функция $\alpha(\cdot)$ не является антимонотонной.*

Гипотеза 2. *Число модальностей, имеющих попарно различные логики над* $\mathbf{E}$, *конечно: $\alpha(\mathbf{E}) < \infty$.*

Положительное решение второй гипотезы влечет положительное решение первой, поскольку, например, $\mathbf{E} \subset \mathbf{S4}$ и $\alpha(\mathbf{S4}) = \infty$ (см. [2]).

Вычисление характеристик $\varepsilon(L)$ и $\varepsilon^{\mathrm{lin}}(L)$ можно назвать "внутренним" подходом к изучению выразительной силы логики L, поскольку в этом случае отождествляются модальности, одинаковые с точки зрения самой логики L. Напротив, вычисление $\alpha(L)$ и $\alpha^{\mathrm{lin}}(L)$ следует отнести к "внешнему" подходу, ибо отождествляемые при этом модальности различны в логике L, но одинаковы с точки зрения "внешнего наблюдателя", изучающего законы, которым подчиняются эти модальности в логике L.

Пользуясь этой терминологией, полученный результат можно интерпретировать следующим образом. Во-первых, на линейных модальностях "внешний" подход дает существенное уменьшение числа "различных" модальностей: $\alpha^{\mathrm{lin}}(\mathbf{E}) = 3$, в то время как $\varepsilon^{\mathrm{lin}}(\mathbf{E}) = \infty$. Заметим, что пока неизвестен пример логики L, удовлетворяющей условиям $\alpha(L) < \infty$ и $\varepsilon(L) = \infty$ (такой пример можно получить из положительного решения гипотезы 2). Во-вторых, обнаруженное отсутствие свойства антимонотонности функции $\alpha^{\mathrm{lin}}(\cdot)$, а именно $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{B}$ при $3 = \alpha^{\mathrm{lin}}(\mathbf{E}) < \alpha^{\mathrm{lin}}(\mathbf{B}) = \infty$, говорит о том, что логики с "богатыми выразительными возможностями" в смысле "внешнего" подхода находятся не в нижней и не в верхней части решетки всех логик (по включению), а являются промежуточными.

Список литературы

[1] *Zolin E.* Embeddings of propositional monomodal logics // Logic J. IGPL. 2000. **8**, № 6. 861–882.

[2] *Золин Е.* Относительная интерпретируемость модальных логик // Фунд. и прикл. матем. 2001. **7**, вып. 1. 77–100.

[3] *Boolos G.* Logic of provability. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.

[4] *Huges G. E., Cresswell M. J.* A new introduction to modal logic. Methuen, London, 1968.

[5] *Segerberg K.* An essay in classical modal logic. Philosophical Studies, 13. Uppsala, 1971.

Поступила в редакцию
18.10.2000