УДК 510.643

Относительная интерпретируемость модальных логик

Евгений Золин

1 Введение.

В настоящей работе рассматриваются логики в пропозициональном языке с одноместным модальным оператором $\Box$. Каждая формула $\psi(p)$ от одной переменной p задает оператор ∇_ψ на множестве формул, называемый *модальностью* и определяемый условием

$$\nabla_\psi(F) = \psi(F).$$

Примером модальности может служить оператор $\Diamond$, задаваемый формулой $\neg\Box\neg p$. Можно выделить два подхода к изучению выразительных возможностей какой-либо модальной логики L:

1) "внутренний" по отношению к логике L подход, при котором не различаются модальности, эквивалентные друг другу над логикой L. Типичным при таком подходе является вопрос о количестве попарно неэквивалентных модальностей в логике L. Этот вопрос для некоторых логик рассмотрен, например, в [1, с. 11], [2, 3, 4].

2) "внешний" подход, заключающийся в том, что отождествляются модальности, имеющие над логикой L одинаковое "поведение". Более точно, с каждой модальностью ∇ можно естественным образом связать перевод tr_∇ на множестве формул: $tr_\nabla(A)$ есть результат замены в A всех подформул вида $\Box B$ на формулы $\nabla(B)$. Тогда логикой $L(\nabla)$ модальности ∇ над L мы назовем множество всех формул, ∇-переводы которых доказуемы в L. "Внешний" подход не различает модальности, имеющие одинаковую логику над L (такие модальности мы назовем *аналогичными* над L). При таком

подходе возникают два вопроса: о количестве попарно неаналогичных модальностей над L и о том, какие именно логики M можно *проинтерпретировать* (то есть найти такую модальность ∇, что $L(\nabla) = M$) в данной логике L.

Классическим примером результата, который можно отнести к этому подходу, является следующая теорема [1, гл. 12]: над логикой Геделя-Леба GL модальность $\boxdot$, задаваемая формулой $\boxdot p = p \wedge \Box p$, описывается логикой Гжегорчика Grz, то есть $GL(\boxdot) = Grz$.

Другим примером может служить изучение свойства *итеративности* [10] логики L, состоящего в том, что для любого натурального числа $n \geq 1$ имеет место $L(\Box^n) = L$.

В настоящей работе рассмотрены некоторые вопросы, связанные со вторым подходом. Для классических модальных логик: K, $K4$, T, $S4$, $S5$, GL, Grz [1], а также для логик доказуемости, введенных в [5], найдено количество попарно неаналогичных модальностей. Рассматривается также вопрос о взаимной интерпретируемости этих логик.

2 Определения и обозначения.

Будем рассматривать модальный язык $\mathcal{L}$, содержащий счетное множество пропозициональных переменных $p_0, p_1, \ldots$, булевы связки $\bot$ и $\to$ и одноместный модальный оператор $\Box$. Используя стандартные определения, можно ввести остальные булевы связки $\top, \neg, \wedge, \vee, \leftrightarrow$ и модальный оператор $\Diamond$. Множество Fm формул этого языка определяется обычным образом. Пусть $\psi(p)$ — формула языка $\mathcal{L}$ от одной переменной p.

Определение. *Модальностью, заданной формулой* $\psi(p)$, называется модальный оператор ∇_ψ (то есть отображение $\nabla_\psi : Fm \to Fm$), определенный следующим образом: $\nabla_\psi(F) = \psi(F)$.

Для модальностей, заданных формулами $\bot$ и p, удобно ввести обозначения $\bot$ и $(\cdot)$ соответственно. Тогда нетрудно видеть, что все модальности можно описать следующей индуктивной схемой:

(i) $\bot$ — (тождественно ложная) модальность;
(ii) $(\cdot)$ — (тождественная) модальность;
(iii) если ∇_1 и ∇_2 — модальности, то $\nabla_1 \to \nabla_2$ — модальность;
(iv) если ∇ — модальность, то $\Box\nabla$ — модальность.

В дальнейшем для модальностей $(\cdot) \to \bot$ и $\Box(\cdot)$ будем использовать более короткую запись: $\neg$ и $\Box$. В качестве примеров модальностей можно привести (пользуясь терминологией, принятой для логик доказуемости) операторы "сильной" доказуемости $\boxdot = (\cdot) \wedge \Box$, итерированной доказуемости $\Box^n$, $n \geq 1$, разрешимости $\Box \vee \Box\neg$.

С каждой модальностью ∇ связан перевод $tr_\nabla : Fm \to Fm$ на множестве формул: формула $tr_\nabla(A)$ получается из A заменой всех операторов $\Box$ на модальность ∇. Более точно: $tr_\nabla(\bot) = \bot$; $tr_\nabla(p) = p$ для любой переменной p; $tr_\nabla(A \to B) = tr_\nabla(A) \to tr_\nabla(B)$; $tr_\nabla(\Box A) = \nabla(tr_\nabla(A))$.

(Модальной) логикой будем называть произвольное множество формул L, содержащее все классические тавтологии в языке $\mathcal{L}$ и замкнутое относительно следующих правил вывода:

MP	(modus ponens)	$A, A \to B \vdash B$;
Sub	(правило подстановки)	$A \vdash A(B/p)$;
RE	(правило эквивалентной замены)	$A \leftrightarrow B \vdash \Box A \leftrightarrow \Box B$.

Здесь $A(B/p)$ — формула, полученная из A заменой всех вхождений переменной p на формулу B. Часто мы будем использовать запись $L \vdash A$ вместо $A \in L$. Далее будем говорить только о непротиворечивых (то есть не содержащих формулу $\bot$) логиках.

Пусть L — модальное исчисление (не обязательно логика), заданное некоторым множеством аксиом и правил вывода, и X — произвольное множество формул. Тогда $L + X$ будет обозначать исчисление, полученное добавлением к аксиомам исчисления L формул из множества X в качестве *схем* аксиом, а LX — исчисление, аксиомами которого являются теоремы исчисления L и формулы из X, взятые в качестве *схем* аксиом, и единственным правилом вывода — MP.

Определение. Логикой $L(\nabla)$ модальности ∇ над логикой L назовем множество формул, ∇-переводы которых доказуемы в L:

$$L(\nabla) = \{ \ A \in Fm \ \mid \ L \vdash tr_\nabla(A) \ \}.$$

Нетрудно проверить, что $L(\nabla)$ — модальная логика.

Определение. Две модальности ∇_1 и ∇_2 будем называть *эквивалентными* над логикой L, если $L \vdash \nabla_1 p \leftrightarrow \nabla_2 p$; *аналогичными* над логикой L, если $L(\nabla_1) = L(\nabla_2)$.

Из эквивалентности модальностей следует их аналогичность: действительно, если $L \vdash \nabla_1 p \leftrightarrow \nabla_2 p$, то $L \vdash tr_{\nabla_1}(A) \leftrightarrow tr_{\nabla_2}(A)$ для любой формулы A.

Константой будем называть модальность, порожденную формулой, не содержащей переменных. *Булевой модальностью* назовем модальность, заданную формулой $\psi(p)$, в которой переменная p не находится в области действия оператора $\Box$.

3 Логики булевых модальностей.

В этом разделе мы построим семейство из 15 логик и покажем, что оно является исчерпывающим для булевых модальностей в том смысле, что над любой непротиворечивой логикой L всякая булева модальность ∇ имеет логику $L(\nabla)$, совпадающую с одной из логик этого семейства. Как будет показано, для того, чтобы узнать, с какой именно логикой из этого семейства совпадает $L(\nabla)$, достаточно найти *характеристическую функцию* χ_∇ модальности ∇ над логикой L, содержащую всю информацию о поведении модальности ∇ над логикой L.

Определение. *Булевой формулой* будем называть формулу, построенную из переменных с помощью булевых связок. Всякую *булеву функцию* $f(x_1, \dots, x_n) : \{\bot, \top\}^n \to \{\bot, \top\}$ мы будем отождествлять с любой булевой формулой, представляющей эту функцию, например, с СДНФ этой функции.

На множестве двуместных булевых функций рассмотрим отношение частичного порядка:

$$f \le g \;\Leftrightarrow \text{формула } f(x,y) \to g(x,y) \text{ является тавтологией.}$$

Определение. *Характеристической функцией* (х.ф.) модальности ∇ над логикой L назовем булеву функцию от двух переменных $\chi(x,y)$, такую что:

(i) $L \vdash \chi(\nabla\bot, \nabla\top)$;

(ii) для любой двуместной булевой функции $f(x,y)$, такой, что $L \vdash f(\nabla\bot, \nabla\top)$, справедливо неравенство $\chi \le f$.

Замечание. Для каждой модальности ∇ существует единственная х.ф. χ_∇ как наименьший элемент непустого множества

$$F_{L,\nabla} = \{\ f(x,y)\ \mid\ L \vdash f(\nabla\bot, \nabla\top)\ \}$$

относительно частичного порядка $\le$, введенного выше. Это вытекает из того, что множество $F_{L,\nabla}$ замкнуто относительно конъюнкции, и следовательно, наименьшим элементом в $F_{L,\nabla}$ является конъюнкция всех функций из $F_{L,\nabla}$.

Пусть ∇ — булева модальность, тогда формула ∇p есть булева комбинация переменной p и констант: $\nabla p \equiv b(p, \Delta_1, \ldots, \Delta_n)$, где Δ_i — константы. Формулу b можно разложить по переменной p:

$$L \vdash b(p, \Delta_1, \ldots, \Delta_n) \leftrightarrow [p \wedge b(\top, \Delta_1, \ldots, \Delta_n) \ \vee \ \neg p \wedge b(\bot, \Delta_1, \ldots, \Delta_n)],$$

то есть $L \vdash \nabla p \leftrightarrow (p \wedge \nabla\top \ \vee \ \neg p \wedge \nabla\bot)$. Таким образом, логика любой булевой модальности содержит формулу

$$\Box p \leftrightarrow (\ (p \wedge \Box\top) \ \vee \ (\neg p \wedge \Box\bot)\ ) \qquad (*)$$

Теорема 3.1 *Пусть L_1 и L_2 — произвольные логики, ∇_1 и ∇_2 — булевы модальности, и пусть ∇_i имеет над L_i х.ф. χ_i, $i = 1, 2$. Тогда*

$$L_1(\nabla_1) \subseteq L_2(\nabla_2) \ \Leftrightarrow \ \chi_2 \leq \chi_1.$$

Доказательство. Обозначим $F_i = F_{L_i, \nabla_i}$. Множество F_i содержит те и только те функции f, для которых имеет место неравенство $f \geq \chi_i$. Поэтому $F_1 \subseteq F_2 \ \Leftrightarrow \ \chi_2 \leq \chi_1$. Кроме того, очевидна импликация $L_1(\nabla_1) \subseteq L_2(\nabla_2) \Rightarrow F_1 \subseteq F_2$. Остается доказать обратную импликацию.

Пусть $F_1 \subseteq F_2$. Возьмем любую формулу $A(\overline{p}) \in L_1(\nabla_1)$, где $\overline{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ — список ее переменных. В силу $(*)$ формула A эквивалентна в $L_1(\nabla_1)$ булевой комбинации $b(\overline{p}, \Box\bot, \Box\top)$ переменных $\overline{p}$ и констант $\Box\bot$ и $\Box\top$, значит $b(\overline{p}, \Box\bot, \Box\top) \in L_1(\nabla_1)$. Разложение этой формулы по переменным $\overline{p}$ дает:

$$\bigvee_{\overline{\sigma} \in \{\bot, \top\}^n} (\overline{p}^{\ \overline{\sigma}} \wedge b(\overline{\sigma}, \Box\bot, \Box\top)) \in L_1(\nabla_1),$$

где $\overline{p}^{\ \overline{\sigma}} \equiv p_1^{\sigma_1} \wedge \ldots \wedge p_n^{\sigma_n}$, $p_i{}^{\bot} \equiv \neg p_i$, $p_i{}^{\top} \equiv p_i$.

Поэтому $b(\overline{\sigma}, \Box\bot, \Box\top) \in L_1(\nabla_1)$ для любого набора $\overline{\sigma} \in \{\bot, \top\}^n$, а значит функция $b(\overline{\sigma}, x, y)$ лежит в F_1, но тогда она лежит и в F_2 при каждом $\overline{\sigma}$. Повторяя рассуждения в обратном порядке, получаем: $b(\overline{p}, \Box\bot, \Box\top) \in L_2(\nabla_2)$ и по $(*)$ окончательно имеем $A \in L_2(\nabla_2)$. $\blacksquare$

Следствие 3.2 *В условиях теоремы 3.1 имеем:*

$$L_1(\nabla_1) = L_2(\nabla_2) \ \Leftrightarrow \ \chi_1 = \chi_2.$$

Несмотря на то, что число попарно неэквивалентных констант в логике L может быть сколь угодно большим, из следствия 3.2 вытекает, что попарно неаналогичных над L булевых модальностей может существовать не более чем 15. Действительно, существует ровно 15 функций от двух переменных, не равных тождественно $\perp$, и никакая модальность не может иметь х.ф. $\perp$ над непротиворечивой логикой.

Над любой логикой L имеется по крайней мере 4 попарно неэквивалентных модальности: $\nabla_0 = \perp, \nabla_1 = (\cdot), \nabla_2 = \neg, \nabla_3 = \top$; очевидно, что каждая из них имеет одну и ту же х.ф. над любой логикой L:

$$\chi_\perp = \neg x \wedge \neg y, \quad \chi_{(\cdot)} = \neg x \wedge y, \quad \chi_\neg = x \wedge \neg y, \quad \chi_\top = x \wedge y.$$

Поэтому логики этих модальностей не зависят от выбора L; обозначим их через $L_\perp$, $L_{(\cdot)}$, $L_\neg$, $L_\top$.

Модальности с другими х.ф. можно выразить не во всех логиках; например, в построенных выше логиках L_{∇_j}, где $j \in \{0,1,2,3\}$, любая модальность эквивалентна одной из четырех модальностей: $\perp, (\cdot), \neg, \top$. Однако справедлива следующая теорема.

Теорема 3.3 *Для любой функции $\chi(x,y) \not\equiv \perp$ существует логика, над которой модальность $\Box$ имеет характеристическую функцию χ.*

Доказательство. Пусть $\emptyset \neq J \subseteq \{0,1,2,3\}$. Покажем, что в логике $L_J = \bigcap\limits_{j \in J} L_{\nabla_j}$ х.ф. модальности $\Box$ имеет следующую СДНФ:

$$\chi_J(x,y) = \bigvee_{j \in J} \left(x^{\nabla_j \perp} \wedge y^{\nabla_j \top} \right).$$

С одной стороны, $L_{\nabla_j} \vdash \chi_J(\Box\perp, \Box\top)$ для любого $j \in J$. Действительно: $L_{\nabla_j} \vdash \Box p \leftrightarrow \nabla_j p$, и поэтому j-ый дизъюнктивный член формулы $\chi_J(\Box\perp, \Box\top)$ эквивалентен $\top$ в L_{∇_j}.

С другой стороны, если $f < \chi_J$, то СДНФ функции $f(x,y)$ не содержит j-ого дизъюнктивного члена для некоторого $j \in J$. Но остальные дизъюнктивные члены формулы $f(\Box\perp, \Box\top)$, очевидно, эквивалентны $\perp$ в логике L_{∇_j}. Следовательно, формула $f(\Box\perp, \Box\top)$ не принадлежит логике L_{∇_j}, а значит и логике L_J.

Таким образом, χ_J содержит наименьший необходимый набор дизъюнктивных членов, то есть χ_J — х.ф. для $\Box$ в логике L_J. Остается заметить, что любая функция $\chi(x,y) \not\equiv \perp$ есть χ_J для некоторого J, такого, что $\emptyset \neq J \subseteq \{0,1,2,3\}$. $\blacksquare$

Построенные в доказательстве теоремы 3.3 логики будем обозначать через $L_{\{\nabla_j | j \in J\}}$; например, если $J = \{0,3\}$, то $L_J = L_\perp \cap L_\top = L_{\perp,\top}$.

Приведем теперь удобную аксиоматику логик булевых модальностей. Обозначим через E минимальную модальную логику.

Теорема 3.4 *Справедливы следующие равенства:*

$$
\begin{array}{rl}
\text{I.} & L_{\perp} = E\{\ \Box p \leftrightarrow \perp\ \}; \quad L_{(\cdot)} = E\{\ \Box p \leftrightarrow p\ \}; \\
 & L_{\neg} = E\{\ \Box p \leftrightarrow \neg p\ \}; \quad L_{\top} = E\{\ \Box p \leftrightarrow \top\ \}. \\
\text{II.} & L_{\perp,(\cdot)} = E\{\ \Box p \leftrightarrow (p \wedge \Box\top)\ \}; \\
 & L_{\perp,\neg} = E\{\ \Box p \leftrightarrow (\neg p \wedge \Box\perp)\ \}; \\
 & L_{\perp,\top} = E\{\ \Box p \leftrightarrow \Box\perp\ \}; \\
 & L_{(\cdot),\neg} = E\{\ \Box p \leftrightarrow (p \leftrightarrow \Box\top)\ \}; \\
 & L_{(\cdot),\top} = E\{\ \Box p \leftrightarrow (p \vee \Box\perp)\ \}; \\
 & L_{\neg,\top} = E\{\ \Box p \leftrightarrow (\neg p \vee \Box\top)\ \}. \\
\text{III.} & L_{\perp,(\cdot),\neg} = E\{\ \Box p \leftrightarrow ((p \leftrightarrow \Box\top) \wedge (\neg p \leftrightarrow \Box\perp))\ \}; \\
 & L_{\perp,(\cdot),\top} = E\{\ \Box p \leftrightarrow ((p \wedge \Box\top) \vee \Box\perp)\ \}; \\
 & L_{\perp,\neg,\top} = E\{\ \Box p \leftrightarrow ((\neg p \wedge \Box\perp) \vee \Box\top)\ \}; \\
 & L_{(\cdot),\neg,\top} = E\{\ \Box p \leftrightarrow ((p \leftrightarrow \Box\top) \vee (\neg p \leftrightarrow \Box\perp))\ \}. \\
\text{IV.} & L_{\perp,(\cdot),\neg,\top} = E\{\ \Box p \leftrightarrow ((p \wedge \Box\top) \vee (\neg p \wedge \Box\perp))\ \}.
\end{array}
$$

Замечание 3.4.1 *Все дополнительные аксиомы имеют вид* $\Box p \leftrightarrow \nabla p$*, где* ∇ *— булева модальность, поэтому исчисления в правых частях равенств замкнуты относительно правила* RE.

Замечание 3.4.2 Обозначим через $\|f\|$ количество наборов из $\{\perp, \top\}^2$, на которых $f(x, y)$ обращается в $\top$. Тогда из доказательства теоремы 3.3 вытекает, что перечисленные выше логики разбиты на группы так, что *над любой логикой из группы с номером* N ($N =$ I, II, III, IV) *модальность* $\Box$ *имеет х.ф.* $\chi_\Box$*, удовлетворяющую условию* $\|\chi_\Box\| = N$.

Доказательство теоремы. Включения ($\supseteq$) очевидны.
($\subseteq$) I. Фиксируем $j \in \{0, 1, 2, 3\}$ и обозначим $E_j = E\{\ \Box p \leftrightarrow \nabla_j\, p\ \}$.
Индукцией по построению формулы F нетрудно показать, что любая формула вида $F \leftrightarrow tr_{\nabla_j}(F)$ лежит в E_j, а значит и в L_{∇_j}. Поэтому если $F \in L_{\nabla_j}$, то $tr_{\nabla_j}(F) \in L_{\nabla_j}$, но последняя формула не содержит $\Box$, значит она — тавтология и, следовательно, лежит в $E \subseteq E_j$; отсюда вытекает, что $F \in E_j$.
II, III, IV. Воспользуемся следующим утверждением: если формулы F и G не имеют общих переменных, то $E\{\ F\ \} \cap E\{\ G\ \} = E\{\ F \vee G\ \}$.

Теперь, чтобы доказать требуемое включение, например, для логики $L_{\perp,(\cdot)} = L_\perp \cap L_{(\cdot)} = E\{\ (\Box p \leftrightarrow \perp) \vee (\Box q \leftrightarrow q)\ \}$, достаточно заметить, что если в последнюю формулу подставить вместо подформул вида $\Box A$ формулы вида $A \wedge \Box\top$, то получится тавтология. Аналогичное доказательство можно провести для остальных логик. $\blacksquare$

Пусть L — произвольная логика. Из пункта I доказанной теоремы следует, что если модальность ∇ аналогична над L одной из модальностей ∇_j, где $j \in \{0,1,2,3\}$, то ∇ эквивалентна ∇_j над L.

Всякая логика из I или II группы имеет вид $L_J = E\{\ \Box p \leftrightarrow \psi(p,\nabla)\ \}$, где $\psi(p,q)$ — булева формула, а ∇ — *нетривиальная* (то есть неэквивалентная $\perp$ или $\top$ над этой логикой) константа $\Box\perp$ или $\Box\top$. Будем говорить, что формула $\psi(p,q)$ *соответствует* логике L_J.

Следствие 3.5 *Пусть логика L имеет нетривиальную константу ∇, булева формула $\psi(p,q)$ соответствует логике L_J из* I *или* II *группы, тогда $L(\ \psi((\cdot),\nabla)\ ) = L_J$. В частности, $L_{\perp,\top}$ — логика любой нетривиальной константы над L: $L(\nabla) = L_{\perp,\top}$.*

Доказательство проведем, например, для формулы $\psi(p,q) = p \wedge q$. В этом случае х.ф. модальности $\Delta = \psi((\cdot),\nabla)$ над L равна, очевидно, $\chi_\Delta(x,y) = \neg x = \chi_J$, где $J = \{0,1\}$, а значит $L(\Delta) = L_J$ по теореме 3.3. Для остальных $\psi(p,q)$ рассуждения проводятся аналогично. $\blacksquare$

Теорема 3.6 *Логики булевых модальностей обладают интерполяционным свойство Крейга.*

Доказательство. Пусть L — логика булевой модальности, и пусть $L \vdash A(\overline{p},\overline{q}) \to C(\overline{q},\overline{r})$, где $\overline{p} = (p_1,\ldots,p_m), \overline{q} = (q_1,\ldots,q_n), \overline{r} = (r_1,\ldots,r_k)$. В силу $(*)$ можно считать, что A и C — булевы комбинации переменных и констант $\Box\perp$ и $\Box\top$, то есть: $L \vdash A(\overline{p},\overline{q},\Box\perp,\Box\top) \to C(\overline{q},\overline{r},\Box\perp,\Box\top)$. Покажем, что искомым интерполянтом является формула

$$B(\overline{q},\Box\perp,\Box\top) \equiv \bigvee_{\overline{\sigma}\in\{\perp,\top\}^m} A(\overline{\sigma},\overline{q},\Box\perp,\Box\top).$$

Из разложения $L \vdash A \leftrightarrow \bigvee\limits_{\overline{\sigma}} (\overline{p}^{\ \overline{\sigma}} \wedge A(\overline{\sigma},\overline{q},\Box\perp,\Box\top))$ вытекает: $L \vdash A \to B$. Так как $L \vdash A(\overline{\sigma},\overline{q},\Box\perp,\Box\top) \to C$ для любого $\overline{\sigma}$, то $L \vdash B \to C$. $\blacksquare$

4 Количество попарно неаналогичных модальностей.

При изучении какой-либо модальной логики L традиционно рассматривается вопрос о количестве попарно неэквивалентных модальностей над логикой L; обозначим его через $\varepsilon(L)$. В статье [3] этот вопрос решен для так называемых диодоровых логик D и D^*, являющихся логиками шкал Крипке $(\omega, \leq)$ и $(\omega^*, \leq)$ соответственно (модальности в [3] называются "модальными функциями"). В [1, с. 11], [2, с. 96, 106, 115, 138], [4] подобный вопрос рассмотрен для модальностей "в узком смысле", то есть для последовательностей символов $\Box$ и $\neg$.

Мы будем интересоваться другой числовой характеристикой модальных логик, а именно количеством попарно неаналогичных модальностей над логикой L, которое обозначим через $\alpha(L)$. Здесь $\alpha(L)$, как и $\varepsilon(L)$ — натуральное число или символ ∞. Заметим, что для любой непротиворечивой логики L справедливо $\varepsilon(L) \geq 4$ и $\alpha(L) \geq 4$; кроме того, в силу замкнутости логики L относительно правила RE имеет место $\alpha(L) \leq \varepsilon(L)$.

В этом разделе мы вычислим характеристики $\varepsilon(L)$ и $\alpha(L)$ для логик булевых модальностей; далее покажем, что для классических нормальных логик $L = K$, $K4$, T, $S4$, $K5$, GL, Grz [1] наряду с известным утверждением $\varepsilon(L) = \infty$ справедливо также, что $\alpha(L) = \infty$, и кроме того $\varepsilon(S5) = \alpha(S5) = 16$. Будет доказан критерий конечности $\alpha(L)$ для модальных логик доказуемости (см. [5]).

4.1 Определение характеристик $\varepsilon(L)$ и $\alpha(L)$ для логик булевых модальностей.

В этом разделе мы вычислим значения $\varepsilon(L)$ и $\alpha(L)$ для логик булевых модальностей, описанных в разделе 3. Нам потребуется приведенное в теореме 3.4 разбиение логик булевых модальностей на группы.

Определение. Логика M *точно интерпретируется* в логике L (обозначение: $M \hookrightarrow L$), если найдется такая модальность ∇, что $M = L(\nabla)$.

Очевидно, что число $\alpha(L)$ равно количеству логик M, точно интерпретирующихся в логике L.

Лемма 4.1.1 *Каждая логика из группы с номером N ($N =$ I, II, III) точно интерпретируется в любой другой логике из той же группы.*

Доказательство. Для $N = \mathrm{I}$ это очевидно.

$N = \mathrm{II}$. В каждой логике L из II группы есть нетривиальная константа ∇ (а именно та, которая входит в правую часть аксиомы этой логики), поэтому в силу следствия 3.5 для любой логики L' из II группы найдется такая булева формула $\psi(p,q)$, что $L(\ \psi((\cdot),\nabla)\ ) = L'$.

$N = \mathrm{III}$. Докажем, например, что $L_{\bot,(\cdot),\top} \hookrightarrow L_{(\cdot),\neg,\top}$. Над логикой $L_{(\cdot),\neg,\top}$ х.ф. модальности $\Box$ равна $x \vee y$, то есть в этой логике имеем $\vdash \Box\bot \vee \Box\top$. Требуется построить модальность ∇, имеющую х.ф. $\neg x \vee y$. Но этому условию, очевидно, удовлетворяет модальность ∇_ψ, задаваемая формулой $\psi(p) \equiv (\neg p \wedge \neg\Box\bot) \vee (p \wedge \Box\top)$, так как в логике $L_{(\cdot),\neg,\top}$ имеем: $\vdash \nabla\bot \leftrightarrow \neg\Box\bot$, $\vdash \nabla\top \leftrightarrow \Box\top$, и значит $\vdash \neg\nabla\bot \vee \nabla\top$. Поэтому $L_{(\cdot),\neg,\top}(\nabla) = L_{\bot,(\cdot),\top}$.

Аналогично в каждой из логик III группы можно построить модальность с любой х.ф. χ, такой, что $\|\chi\| = 3$. $\blacksquare$

Лемма 4.1.2 *Каждая логика из группы с номером N ($N =$ I, II, III) точно интерпретируется в любой из логик группы с номером $N' > N$.*

Доказательство. Случай $N = \mathrm{I}$ очевиден. В силу леммы 4.1.1 и транзитивности отношения $\hookrightarrow$ достаточно для каждого $N =$ II, III найти логику из группы с номером N, точно интерпретирующуюся в какой-либо логике из группы с номером $N' = N + 1$.

$N = \mathrm{II}$. Константа $\nabla = \Box\top$ нетривиальна в логике $L_{\bot,(\cdot),\neg}$, и значит $L_{\bot,(\cdot),\neg}(\nabla) = L_{\bot,\top}$ по следствию 3.5.

$N = \mathrm{III}$. Пусть L — логика из III группы. По теореме 3.4 мы имеем: $L = E\{\ \Box p \leftrightarrow \nabla p\ \}$, причем ∇ — булева модальность. Легко проверить, что х.ф. χ_∇ модальности ∇ над $L_{\bot,(\cdot),\neg,\top}$ совпадает с х.ф. $\chi_\Box$ модальности $\Box$ над L. По следствию 3.2 получаем: $L_{\bot,(\cdot),\neg,\top}(\nabla) = L$. $\blacksquare$

Определение. Константы Δ_1 и Δ_2 *независимы* над логикой L, если любая их булева комбинация, доказуемая в L, является тавтологией; другими словами, если над логикой L характеристическая функция модальности ∇_ψ, задаваемой формулой $\psi(p) \equiv (p \wedge \Delta_1) \vee (\neg p \wedge \Delta_2)$, равна $\top$.

Лемма 4.1.3 *Никакая логика из группы с номером N ($N =$ II, III, IV) не интерпретируется точно ни в одной из логик группы с номером $N' < N$.*

Доказательство. Ввиду транзитивности отношения $\hookrightarrow$ достаточно доказать лемму при $N' = N - 1$ и в каждом случае лишь для одной пары логик из соответствующих групп. При $N = \mathrm{II}$ утверждение очевидно.

$N = \mathrm{III}$. В логике $L_{\bot,\top}$ любая модальность эквивалентна булевой комбинации модальностей $(\cdot)$ и $\Box\top$, а значит по следствию 3.5 в $L_{\bot,\top}$ точно интерпретируются лишь логики из групп I и II.

$N = \mathrm{IV}$. В логике $L_{\bot,(\cdot),\neg}$ нет независимых констант, а значит нет модальностей, х.ф. которых равна $\top$, поэтому $L_{\bot,(\cdot),\neg,\top} \not\hookrightarrow L_{\bot,(\cdot),\neg}$. ■

Теорема 4.1.4 *Если L — логика из группы с номером $N = \mathrm{I, II, III, IV}$, то $\alpha(L) = 4, 10, 14, 15$ и $\varepsilon(L) = 4, 16, 64, 256$ соответственно.*

Доказательство для $\alpha(L)$ содержится в леммах.

Всякая модальность в L эквивалентна некоторой булевой комбинации вида $b(\ (\cdot), \Box\bot, \Box\top\ )$; существует ровно 256 таких комбинаций. Возьмем любые две комбинации b_1 и b_2 и положим $b \equiv (b_1 \leftrightarrow b_2)$. Очевидно, что $L \vdash b(p, \Box\bot, \Box\top) \ \Leftrightarrow\ b(\sigma, x, y) \geq \chi_\Box(x, y)$ для любого $\sigma \in \{\bot, \top\}$ в смысле стандартного порядка на булевых функциях (см. раздел 3).

Значит $L \vdash b_1 \leftrightarrow b_2 \ \Leftrightarrow$ функции $b_1(p, x, y)$ и $b_2(p, x, y)$ различаются лишь на некоторых наборах из множества $\{\ (\sigma, \sigma_0, \sigma_1) \in \{\bot, \top\}^3 \ \mid \chi_\Box(\sigma_0, \sigma_1) = \bot\ \}$ мощности $2 \cdot (4 - \|\chi_\Box\|)$, причем $\|\chi_\Box\| = N$ (см. замечание 3.4.2). Отсюда $\varepsilon(L) = 256/2^{2\cdot(4-N)} = 2^{2N}$. ■

4.2 Нормальные модальные логики.

В этом разделе будут вычислены характеристики $\varepsilon(L)$ и $\alpha(L)$ для некоторых классических нормальных логик.

Определение. *Нормальной модальной логикой* (см. [1, с. 4]) называется множество формул, содержащее аксиомы

(A1) все классические тавтологии в модальном языке $\mathcal{L}$,

(A2) $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$ (дистрибутивность)

и замкнутое относительно правил вывода MP, Sub и правила

Nec (правило введения оператора $\Box$) $A \vdash \Box A$.

Минимальная нормальная логика обозначается через K. Нормальные логики удовлетворяют нашему определению модальной логики, что вытекает из следующей простой леммы.

Лемма 4.2.1 *Если множество формул L содержит логику K и замкнуто относительно правил* MP *и* Sub*, то:*

L — модальная логика (то есть L замкнуто по RE*)* $\Leftrightarrow$

L — нормальная логика (то есть L замкнуто по Nec*).*

В этом разделе мы рассмотрим различные логики, аксиоматизируемые над K следующими схемами аксиом:

(A3)	$\Box p \to p$	(рефлексивность)
(A4)	$\Box p \to \Box\Box p$	(транзитивность)
(A5)	$p \to \Box\Diamond p$	(симметричность)
(A6)	$\Diamond p \to \Box\Diamond p$	(евклидовость)
(A7)	$\Box(\Box p \to p) \to \Box p$	(схема Леба)
(A8)	$\Box(\Box(p \to \Box p) \to p) \to p$	(схема Гжегорчика)

Нас будут интересовать следующие системы [1, с. 5]:
$T = K + (A3)$; $K4 = K + (A4)$; $S4 = T + (A4)$; $K5 = K + (A5)$; $S5 = S4 + (A5) = T + (A6)$; $GL = K + (A7)$ — логика Геделя-Леба; $Grz = K + (A8)$ — логика Гжегорчика.

Пользуясь семантикой Крипке для этих логик [1, гл. 5, 12], легко доказать, что для каждой логики L из этого списка, кроме $S5$, имеет место $\varepsilon(L) = \infty$, а также $\varepsilon(S5) = 16$. В этом разделе мы установим эти же факты для числа $\alpha(L)$.

Теорема 4.2.2 *Если L — логика и $K \subseteq L \subseteq GL$, то $\varepsilon(L) = \alpha(L) = \infty$.*

Доказательство. Поскольку $\varepsilon(L) \geq \alpha(L)$, то достаточно доказать, что $\alpha(L) = \infty$. Определим индуктивно последовательность модальностей:

$$\nabla_1 = (\cdot); \quad \nabla_{n+1} = (\cdot) \wedge \Diamond\nabla_n, \ n \geq 1. \tag{1}$$

Покажем, что логики модальностей ∇_n над L попарно различны. Пусть $N > m \geq 1$ — натуральные числа, $p_1, \ldots, p_N$ — различные переменные, $\mathcal{N} = \{1, \ldots, N\}$. Рассмотрим следующие формулы:

$$A_{N,m} \equiv \Box\Big(\bigvee_{j\in\mathcal{N}} p_j\Big) \to \bigvee_{\mathcal{J}\subseteq\mathcal{N},\ |\mathcal{J}|=m} \Box\Big(\bigvee_{j\in\mathcal{J}} p_j\Big).$$

Лемма 4.2.3 *Если $m \geq n$, то $A_{N,m} \in K(\nabla_n)$ при любом $N > m$.*

Доказательство. Воспользуемся теоремой о полноте [1, гл. 5] логики K: $K \vdash A \iff A$ общезначима во всех конечных шкалах Крипке.
Пусть $(W, \mathrm{R}, \models)$ — произвольная модель Крипке, $x_1 \in W$. Предположим, что $x_1 \models \nabla_n(\bigvee_{j\in\mathcal{N}} p_j)$; это означает следующее: существуют (не обязательно различные) элементы $x_2, \ldots, x_n \in W$, такие, что имеет место

x_1 R x_2 R … R x_n, а также $\forall i = 1, \ldots, n \quad \exists j = j(i) \in \mathcal{N} \quad x_i \models p_j$. Тогда, если взять такое множество $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{N}$, $|\mathcal{J}| = m$, что $\mathcal{J} \supseteq \{ j(1), \ldots, j(n) \}$, то получим $x_1 \models \nabla_n(\bigvee_{j \in \mathcal{J}} p_j)$. ■

Лемма 4.2.4 *Если $m < n$, то $A_{N,m} \notin GL(\nabla_n)$ при любом $N > m$.*

Доказательство. Логика GL полна относительно конечных иррефлексивных транзитивных шкал Крипке [1, гл. 5]. Рассмотрим множество $W = \{1, \ldots, n\}$ с обычным порядком $<$ на натуральных числах; положим $i \models p_j \Leftrightarrow i = j$, где $1 \leq i \leq n$, $j \in \mathcal{N}$. Тогда $(W, <, \models)$ является моделью логики GL и $1 \not\models tr_{\nabla_n}(A_{N,m})$, что и требовалось доказать. ■

Из лемм 4.2.3 и 4.2.4 следует, что $A_{N,m} \in L(\nabla_n) \Leftrightarrow m \geq n$ при любом $N > m$, и значит $L(\nabla_n) \neq L(\nabla_r)$ при $n \neq r$. ■

В силу известного включения $K \subset K4 \subset GL$ [1, гл. 1] из доказанной теоремы следует, что $\alpha(K4) = \infty$.

Рассмотрим теперь модальности "в узком смысле" (ср. [1, с. 10]), а именно последовательности символов $\Box$ и $\neg$, не содержащие подпоследовательности '$\neg\neg$'.

Следствие 4.2.5 *Над логикой GL аналогичны любые две модальности "в узком смысле", содержащие подпоследовательность* '$\Box\neg\Box$'.

Доказательство. Любая такая модальность ∇ имеет вид $\Box^m\Diamond\Delta$ или $\neg\Box^m\Diamond\Delta$, где $m \geq 1$, а Δ — некоторая модальность. Так как $GL \vdash \Box^m\Diamond A \leftrightarrow \Box^m\bot$, то ∇ эквивалентна в GL нетривиальной константе $\Box^m\bot$ или $\neg\Box^m\bot$, и значит $GL(\nabla) = L_{\bot,\top}$ по следствию 3.5. ■

Как было показано в [10], логика GL обладает свойством *итеративности*: $GL(\Box^n) = GL$ для каждого $n \geq 1$. Следовательно, над логикой GL существует ровно 9 попарно неаналогичных модальностей "в узком смысле": $\bot, \top, (\cdot), \neg, \Box, \Box\neg, \neg\Box, \Diamond, \Box\neg\Box$.

Рассмотрим теперь нормальные логики, содержащие аксиому рефлексивности (A3). Эти логики не охватываются теоремой 4.2.2; более того, в них все модальности из последовательности (1) эквивалентны тождественной модальности $(\cdot)$. Однако верна следующая теорема.

Теорема 4.2.6 *Если L — логика и $K \subseteq L \subseteq Grz$, то $\varepsilon(L) = \alpha(L) = \infty$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что $\alpha(L) = \infty$. Введем следующую последовательность модальностей:

$$\nabla'_1 = (\cdot); \quad \nabla'_{n+1} = (\cdot) \wedge \Diamond(\neg(\cdot) \wedge \Diamond\nabla'_n), \ n \geq 1. \qquad (2)$$

Покажем, что логики $L(\nabla'_n)$ попарно различны. Будем рассматривать формулы $A_{N,m}$, построенные в доказательстве теоремы 4.2.2.

Лемма 4.2.7 *Если $m \geq n$, то $A_{N,m} \in K(\nabla'_n)$ при любом $N > m$.*

Доказательство повторяет доказательство леммы 4.2.3 с учетом того, что теперь условие $x_1 \models \nabla'_n(\bigvee\limits_{j \in \mathcal{N}} p_j)$ означает: существуют (не обязательно различные) элементы $y_2, x_2, \ldots, y_n, x_n \in W$, такие, что

$$\begin{gathered} x_1 \mathrm{~R~} y_2 \mathrm{~R~} x_2 \mathrm{~R} \ldots \mathrm{R~} y_n \mathrm{~R~} x_n, \\ \forall i = 1, \ldots, n \quad \forall j \in \mathcal{N} \quad y_i \not\models p_j, \\ \forall i = 1, \ldots, n \quad \exists j = j(i) \in \mathcal{N} \quad x_i \models p_j. \quad \blacksquare \end{gathered}$$

Лемма 4.2.8 *Если $m < n$, то $A_{N,m} \notin Grz(\nabla'_n)$ при любом $N > m$.*

Доказательство. Воспользуемся тем, что логика Grz полна относительно конечных рефлексивных транзитивных антисимметричных шкал Крипке [1, гл. 12]. На множестве $W = \{1, \ldots, 2n-1\}$ с обычным порядком $\leq$ определим отношение вынуждения $\models$ следующим образом: $i \models p_j \Leftrightarrow i = 2j - 1$, где $i \in W, \ j \in \mathcal{N}$. Тогда $(W, \leq, \models)$ — модель логики Grz и $1 \not\models tr_{\nabla'_n}(A_{N,m})$. $\blacksquare$

Из доказанных лемм следует утверждение теоремы. $\blacksquare$

Так как справедливы включения $K \subset T \subset S4 \subset Grz$ (см. [1]), то из теоремы 4.2.6 вытекает: $\alpha(T) = \alpha(S4) = \infty$.

В логике $K5$ модальности ∇_n из последовательности (1) при $n > 1$ эквивалентны ∇_2; аналогичное утверждение верно и для последовательности (2). Тем не менее справедлива следующая теорема.

Теорема 4.2.9 *Если L — логика и $K \subseteq L \subseteq K5$, то $\varepsilon(L) = \alpha(L) = \infty$.*

Доказательство. Так как $\varepsilon(K5) = \infty$, то $\varepsilon(L) = \infty$. Рассмотрим последовательность модальностей (∇''_n), задаваемых формулами:

$$\psi''_1(p) = p \wedge \Diamond p; \quad \psi''_{n+1}(p) = p \wedge \Diamond(p \wedge \Diamond(\neg p \wedge \Diamond(\neg p \wedge \Diamond\psi''_n(p)))), \ n \geq 1. \ (3)$$

и формулы $A_{N,m}$, построенные в доказательстве теоремы 4.2.2. Легко видеть, что если $m \geq 2n$, то $A_{N,m} \in K(\nabla''_n)$ при любом $N > m$. Пользуясь полнотой логики $K5$ относительно симметричных шкал Крипке, можно показать, что если $m < 2n$, то $A_{N,m} \notin K5(\nabla''_n)$ при каждом $N > m$. Следовательно логики $L(\nabla''_n)$ попарно различны и $\alpha(L) = \infty$. ■

Наконец, рассмотрим логику $S5$. Эта логика полна относительно класса шкал Крипке (W, R) с универсальным отношением $\mathrm{R} = W \times W$.

Теорема 4.2.10 $\varepsilon(S5) = \alpha(S5) = 16$.

Доказательство. Любая модальность над $S5$ эквивалентна одной из следующих (попарно неэквивалентных) модальностей:

(i) модальности $\nabla,\ \neg\nabla,\ \nabla\neg,\ \neg\nabla\neg$, где ∇ — это $\Box$ или $\lambda = (\cdot) \to \Box$;
(ii) модальности $\nabla,\ \neg\nabla$, где ∇ — это $(\cdot)$ или $\mu = \lambda \wedge \Diamond$;
(iii) модальности $\nabla,\ \neg\nabla$, где ∇ — это $\bot$ или $\rho = \Box \vee \Box\neg$.

Для доказательства достаточно проверить, что этот список модальностей замкнут относительно применения связки $\to$ и оператора $\Box$. Заметим лишь, что любая модальность из этого списка эквивалентна некоторой булевой комбинации модальностей $(\cdot)$ и μ, поэтому замкнутость этого списка относительно применения связки $\to$ очевидна.

Покажем теперь, что $\alpha(S5) = 16$. Модальности из группы (iii) и только они являются *четными*, то есть их логики (над $S5$) содержат формулу $\Box\neg p \leftrightarrow \Box p$. Модальности из группы (ii) и только они являются *нечетными*: их логики содержат формулу $\Box\neg p \leftrightarrow \neg\Box p$. Логики модальностей $\bot, \top, (\cdot), \neg$ отличны друг от друга и от логик других модальностей из той же группы.

Далее $(\Box p \leftrightarrow \Box\Box p) \in S5(\neg\mu) \setminus S5(\mu)$; $\Box\Box p \in S5(\rho) \setminus S5(\neg\rho)$. Значит логики модальностей из групп (ii) и (iii) попарно различны. Нетрудно проверить аналогичное утверждение для группы (i). ■

4.3 Логики доказуемости.

Здесь будут рассмотрены представленные в [5] логики доказуемости. Пусть $\mathcal{T}$ и $\mathcal{U}$ — две арифметические теории, теория $\mathcal{T}$ перечислима. Рассмотрим арифметические интерпретации модального языка, при которых пропозициональным переменным сопоставляются арифметически предложения, а оператор $\Box$ интерпретируется формулой доказуемости в теории $\mathcal{T}$. Тогда множество модальных формул, все интерпретации которых доказуемы в теории $\mathcal{U}$, называется *логикой доказуемости.*

Многие из этих логик не замкнуты относительно правила RE и значит не удовлетворяют нашему определению модальной логики. Поэтому в разделе 4.3 употребление термина *логика* не будет подразумевать замкнутости относительно правила RE.

Напомним определения двух базовых логик доказуемости:

$D = GL\{\ \neg\Box\bot,\ \Box(\Box p \vee \Box q) \to (\Box p \vee \Box q)\ \}$ — логика Джапаридзе;

$S = GL\{\ \Box p \to p\ \}$ — логика Соловея.

Введем также обозначение: $F_n \equiv \Box^{n+1}\bot \to \Box^n\bot$, где $n \in \omega = \{0, 1, \ldots\}$. В работе [6] показано, что логики доказуемости исчерпываются следующими системами:

$$GL_\alpha = GL\{\, F_n \mid n \in \alpha\,\},$$
$$GL_{\beta^-} = GL\{\ \bigvee_{n \notin \beta} \neg F_n\ \},\ D_\beta = D \cap GL_{\beta^-},\ S_\beta = S \cap GL_{\beta^-},$$

где $\alpha, \beta \subseteq \omega$, множество $\omega \setminus \beta$ — конечно. Если $\omega \setminus \beta$ — конечно, то $GL_\beta \subset D_\beta \subset S_\beta \subset GL_{\beta^-}$; кроме того: $D_\omega = D$, $S_\omega = S$, $GL_{\omega^-} = Fm$.

Рассмотрим сначала логику Соловея S, аксиоматизирующую множество всех арифметически истинных законов формальной доказуемости. Опишем семантику для логики S, предложенную Виссером [7].

Определение. *Хвостовой моделью* называется тройка $\mathcal{M} = (W, \prec, \models)$ (где W — непустое множество, $\prec$ — обратно фундированный древовидный частичный порядок на W), в которой выделены *хвостовой* элемент r и *нижняя точка* b, такие что выполняются условия:

(1) $\{\ x \in W \ \mid\ r \preceq x\ \}$ — конечное дерево (здесь $\preceq$ — рефлексивное отношение, соответствующее отношению $\prec$);
(2) множество $\{x \in W \mid x \prec r\}$ линейно упорядочено по типу $(\omega + 1)^*$;
(3) любой элемент из W сравним с r;
(4) b — наименьший элемент в W;
(5) вынуждение переменных одинаково в точках из $\{\, x \in W \ \mid\ x \preceq r\,\}$.

Формула A называется *истинной* в модели $\mathcal{M}$, если она истинна в нижней точке: $\mathcal{M}, b \models A$.

Теорема 4.3.1 ([7]) $S \vdash A\ \Leftrightarrow\ A$ *истинна в любой хвостовой модели.*

Пользуясь данной семантикой для логики S, нетрудно проверить, что модальности из последовательности (2) попарно неэквивалентны над S; следовательно $\varepsilon(S) = \infty$.

Теорема 4.3.2 $\alpha(S) = \infty$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность модальностей (2) и формулы $A_{N,m}$, построенные в доказательстве теоремы 4.2.2. В силу леммы 4.2.7 если $m \geq n$, то $A_{N,m} \in K(\nabla'_n) \subseteq S(\nabla'_n)$ при любом $N > m$.

Пусть $m < n$. Построим хвостовую модель $\mathcal{M} = (W, \prec, \models)$, в которой опровергается формула $tr_{\nabla_n}(A_{N,m})$.

Пусть $W = \{b\} \cup V$, где $V = \{\ldots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, y_2, x_2, \ldots, y_n, x_n\}$, множество W линейно упорядочено отношением $\prec$ и имеет порядковый тип $(\omega+1)^*$, при этом b — нижняя точка, а на элементах множества V порядок задан следующим образом: $\ldots \prec x_{-2} \prec x_{-1} \prec x_0 \prec x_1 \prec y_2 \prec x_2 \prec \ldots \prec y_n \prec x_n$. Определим отношение вынуждения: $b \models p_1$; $x_{-i} \models p_1$ при всех $i \geq 0$; $x_i \models p_i$ при $i = 1, \ldots, n$. Тогда $\mathcal{M}$ — хвостовая модель с хвостовым элементом $r = x_1$, и имеет место $b \not\models tr_{\nabla'_n}(A_{N,m})$. ■

Следствие 4.3.3 *Если L — логика (не обязательно замкнутая относительно правила* RE*), такая, что $K \subseteq L \subseteq S$, то $\varepsilon(L) = \alpha(L) = \infty$.*

Таким образом, если логика доказуемости L является *регулярной* [5], то есть $L \subseteq S$, то $\varepsilon(L) = \alpha(L) = \infty$. Из результатов работы [6] следует, что логики доказуемости, не содержащиеся в S (то есть *сингулярные*, [5]), исчерпываются логиками вида GL_{β^-}. Покажем, что для любой сингулярной логики доказуемости L справедливо $\varepsilon(L) < \infty$ и $\alpha(L) < \infty$.

Пусть $\beta_k = [k, \infty) = \{\ n \in \omega \ \mid n \geq k\ \}$, где $k \geq 0$. Рассмотрим сначала логику $GL_{k^-} = GL_{\beta_k^-}$. Очевидно, что $GL_{k^-} = GL\{\ \Box^k \bot\ \}$.

Определение. *Глубиной* вхождения некоторой подформулы в формулу F назовем число операторов $\Box$, в области действия которых находится это вхождение в формуле F.

Через $F^{(k)}$ обозначим формулу, полученную из F заменой всех вхождений подформул глубины k на $\bot$. Введем обозначение $(\nabla_\psi)^{(k)} = \nabla_{\psi^{(k)}}$. *Степенью* $\deg(\nabla_\psi)$ модальности ∇_ψ назовем максимальную глубину вложений оператора $\Box$ в формуле $\psi(p)$, то есть:

$$\deg(\bot) = \deg(\ (\cdot)\ ) = 0;$$
$$\deg(\nabla_1 \to \nabla_2) = \max\{\deg(\nabla_1), \deg(\nabla_2)\};$$
$$\deg(\Box\nabla) = 1 + \deg(\nabla).$$

Лемма 4.3.4 $GL_{k^-} \vdash F \leftrightarrow F^{(k)}$ *для любой формулы F.*

Доказательство. Достаточно индукцией по k доказать, что $GL \vdash \Box^k \bot \to (F \leftrightarrow F^{(k)})$. $\blacksquare$

Следствие 4.3.5 $\varepsilon(GL_k\text{-}) < \infty$, $\alpha(GL_k\text{-}) < \infty$.

Доказательство. Над GL_k- любая модальность ∇ эквивалентна $\nabla^{(k)}$, но над любой логикой существует лишь конечное число попарно неэквивалентных модальностей ограниченной степени, значит $\varepsilon(GL_k\text{-}) < \infty$. Далее, в [5] установлено, что логика GL_k- замкнута относительно правила Nec, а значит по лемме 4.2.1 и относительно правила RE, откуда следует, что $\alpha(GL_k\text{-}) \leq \varepsilon(GL_k\text{-}) < \infty$. $\blacksquare$

Возьмем теперь произвольное множество $\beta \subseteq \omega$ с конечным дополнением. Существует такое $k \geq 0$, что $(\omega \setminus \beta) \subseteq \{\ n \in \omega \ \ | \ n < k\ \}$, поэтому $[k, \infty) \subseteq \beta$ и $GL_k\text{-} \subseteq GL_\beta\text{-}$. Следовательно, $\varepsilon(GL_\beta\text{-}) \leq \varepsilon(GL_k\text{-}) < \infty$.

Отсюда, однако, мы не можем непосредственно заключить, что $\alpha(GL_\beta\text{-}) < \infty$, так как логика GL_β- вообще говоря не замкнута относительно правила RE. Тем не менее, покажем, что над логикой $L = GL_\beta$- любая модальность ∇ аналогична модальности $\nabla^{(k)}$.

Пусть $A \in L(\nabla)$, то есть $L \vdash tr_\nabla(A)$. Так как $L \supseteq GL_k$-, то по лемме 4.3.4 $L \vdash (tr_\nabla(A))^{(k)}$. Легко показать (двойной индукцией по построению формулы A и модальности ∇), что $(tr_\nabla(A))^{(k)} \equiv (tr_{\nabla^{(k)}}(A))^{(k)}$, тогда $L \vdash (tr_{\nabla^{(k)}}(A))^{(k)}$, и по лемме 4.3.4 имеет место $L \vdash tr_{\nabla^{(k)}}(A)$, значит $A \in L(\nabla^{(k)})$. Эти рассуждения обратимы, поэтому $L(\nabla) = L(\nabla^{(k)})$. Таким образом, $\alpha(GL_\beta\text{-}) < \infty$.

5 Интерпретируемость модальных логик.

В этом разделе будем называть *логикой* любое множество формул, содержащее все тавтологии и замкнутое относительно правил MP и Sub. В разделе 4.1 было дано определение понятия *точной интерпретируемости* ($\hookrightarrow$) модальных логик; там же было полностью изучено это отношение на множестве логик булевых модальностей. Здесь мы рассмотрим это отношение на известных модальных логиках, в частности, на нормальных логиках и логиках доказуемости (определения см. в разделах 4.2 и 4.3). Будут приведены несколько необходимых условий точной интерпретируемости и вытекающие из них отрицательные результаты, касающиеся точной интерпретируемости одних известных логик в других. Введем сначала вспомогательное понятие.

Определение. Логика M *слабо интерпретируется* в логике L, если существует модальность ∇, такая что $M \subseteq L(\nabla)$.

Отношение слабой интерпретируемости рассматривалось, например, в работе [8] для некоторых модальных логик Льюиса (для обозначения того, что логика M слабо интерпретируется в логике L, в [8] используется термин "в L есть M-образ").

Лемма 5.1 *Каждая нормальная логика слабо интерпретируется в любой логике.*

Доказательство. Пусть L — нормальная логика. Из результатов, полученных в [9], следует, что если $L \vdash \neg\Box\bot$, то $L \subseteq L_{(\cdot)}$, в противном случае $L \subseteq L_{\top}$. Но логики $L_{(\cdot)}$ и $L_{\top}$ точно интерпретируются в любой логике. ■

Следующие далее леммы 5.2 и 5.4 дают необходимые условия для слабой интерпретируемости, которые, очевидно, являются необходимыми условиями для точной интерпретируемости.

Лемма 5.2 *Пусть $M \subseteq L(\nabla)$ и логика L замкнута относительно правила* RE, *тогда $[M] \subseteq L(\nabla)$, где $[M]$ — минимальная логика, содержащая M и замкнутая относительно правила* RE.

Следствие 5.3 *Если $0 \in \alpha \subseteq \omega$, то логика GL_α не интерпретируется слабо в GL.*

Доказательство. По лемме 4.2.1 логика $[GL_\alpha]$ замкнута относительно правила Nec, и поэтому вместе с формулой $\neg\Box\bot$ она содержит формулу $\Box(\Box\bot \to \bot)$, которая даже в GL эквивалентна формуле $\Box\bot$. Значит логика $[GL_\alpha]$ противоречива и не интерпретируется слабо в GL. ■

Лемма 5.4 *Если логика M слабо интерпретируется в L, и логика L содержится в какой-либо из логик $L_\bot$, $L_{(\cdot)}$, $L_\neg$, $L_\top$, то и M содержится в одной из них.*

Доказательство. Если $L \subseteq L_{\nabla_j}$, где $j \in \{0,1,2,3\}$ (обозначения см. в разделе 3), то $L(\nabla) \subseteq L_{tr_{\nabla_j}(\nabla)}$. ■

Для получения следствия напомним введенное в [5] понятие *следа* $t(L)$ логики L. Пусть $(W, \prec)$ — конечное иррефлексивное транзитивное дерево с корнем r.

Определение([5]). Если x — лист дерева $(W, \prec)$, то его *глубина* $d(x) = 0$; иначе $d(x) = \max\{d(y) \mid x \prec y\}$. *Высотой* модели $\mathcal{M} = (W, \prec, \models)$ называется глубина ее корня. *Следом* формулы A называется множество $t(A) = \{n \in \omega \mid$ существует модель $\mathcal{M}$ высоты n с корнем r такая, что $\mathcal{M}, r \not\models A\}$. *Следом* $t(L)$ логики L называется объединение следов всех формул, принадлежащих L: $t(L) = \bigcup\limits_{A \in L} t(A)$.

Рассмотрим семейство логик, содержащих GL. Для любой логики L из этого семейства справедливо: $L \subseteq L_{\top} \;\Leftrightarrow$ все формулы логики L истинны в любой модели высоты 0 $\;\Leftrightarrow\; 0 \notin t(L)$; кроме того, L не содержится ни в одной из логик $L_{\bot}$, $L_{(\cdot)}$, $L_{\neg}$. Отсюда вытекает следующее утверждение.

Следствие 5.5 *Если логики L и M содержат GL, $0 \notin t(L)$ и $0 \in t(M)$, то логика M не интерпретируется слабо в логике L.*

Доказательство. По доказанному $L \subseteq L_{\top}$, а M не содержится ни в одной из логик $L_{\bot}$, $L_{(\cdot)}$, $L_{\neg}$, $L_{\top}$. $\blacksquare$

Далее будем говорить о точной интерпретируемости логик.

Лемма 5.6 *Следующие условия являются необходимыми для того, чтобы $M \hookrightarrow L$:*

(i) $\varepsilon(M) \leq \varepsilon(L)$ *и* $\alpha(M) \leq \alpha(L)$;

(ii) *наличие нетривиальных констант в M влечет их наличие в L;*

(iii) $\mathrm{const}(M) \leq \mathrm{const}(L)$, *где* $\mathrm{const}(L)$ *есть число попарно неэквивалентных констант в логике* L;

(iv) *если логика L замкнута относительно правила* RE, *то это же верно и для логики M.*

Следствие 5.7 (i) *Никакая регулярная логика доказуемости не интерпретируется точно ни в одной из сингулярных.*

(ii) *Если логика L замкнута относительно правила* RE *и содержит формулы $\Box\top$ и $\neg\Box\bot$, то $GL \not\hookrightarrow L$.*

(iii) *Если логика L содержит GL_{β} для некоторого множества $\beta \subseteq \omega$ с конечным дополнением, то $GL \not\hookrightarrow L$.*

(iv) *В логике GL не интерпретируется точно никакая регулярная логика доказуемости, кроме самой GL, а также никакая сингулярная логика доказуемости, след которой не имеет вид $[k, \infty)$, $k \geq 0$.*

Доказательство. (i) Следует из леммы 5.6,(i) и результатов раздела 4.3.
(ii) В такой логике L нет нетривиальных констант.
(iii) Известно [1, гл. 7], что над GL любая константа эквивалентна булевой комбинации констант вида $\Box^n\bot$, но для каждого $n \in \beta$ имеем $GL_\beta \vdash \Box^n\bot \leftrightarrow \Box^{n+1}\bot$, поэтому $\mathrm{const}(GL_\beta) < \infty$. Значит $\mathrm{const}(L) < \infty$, однако $\mathrm{const}(GL) = \infty$, поэтому $GL \not\hookrightarrow L$ в силу леммы 5.6,(iii).
(iv) В [5] доказано, что в классе логик доказуемости замкнутыми относительно правила Nec (или RE, что то же самое в силу леммы 4.2.1) являются только логика GL и сингулярные логики GL_{β^-}, след β которых имеет вид $[k, \infty)$ для некоторого $k \geq 0$. ■

Определение. Формула A называется *модализированной по переменной* p, если все вхождения этой переменной в A находятся в области действия оператора $\Box$. Формулу A назовем *модализированной*, если она модализирована по всем переменным; другими словами, если A есть булева комбинация формул вида $\Box B$.

Пусть $\overline{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ — все переменные, по которым формула A не модализирована, тогда она имеет (над исчислением высказываний) разложение по этим переменным:

$$A \leftrightarrow \bigvee_{\overline{\sigma} \in \{\bot, \top\}^n} \left(\overline{p}^{\,\overline{\sigma}} \wedge B_{\overline{\sigma}}\right), \qquad (\sharp)$$

где $B_{\overline{\sigma}}$ — модализированные формулы.

Определение. Будем говорить, что логика L *модализирована*, если для любой формулы A из условия $L \vdash A$ следует $L \vdash B_{\overline{\sigma}}$ для каждого $\overline{\sigma} \in \{\bot, \top\}^n$, где $B_{\overline{\sigma}}$ — формулы из разложения ($\sharp$). Другими словами, логика L модализирована, если она не доказывает никакой нетривиальной булевой комбинации переменных и модализированных формул.

Теорема 5.8 *Пусть L — модализированная логика, M — нормальная логика, содержащая аксиому симметричности* (A5) $p \to \Box\Diamond p$, *и пусть $M \subseteq L(\nabla)$ для некоторой модальности ∇. Тогда $L(\nabla)$ совпадает с одной из логик $L_{(\cdot)}$, $L_\top$, $L_{(\cdot),\top}$.*

Доказательство. Достаточно показать, что $L_{(\cdot),\top} \subseteq L(\nabla)$. Рассмотрим формулу ∇p. Ее разложение ($\sharp$) имеет вид:

$$\nabla p \leftrightarrow (\ (p \wedge \Delta p) \vee (\neg p \wedge \Delta' p)\ ).$$

Логика M содержит аксиому дистрибутивности, и значит мы имеем $L \vdash \nabla(p \to q) \to (\nabla p \to \nabla q)$. Применив к разложению ($\sharp$) этой формулы свойство модализированности логики L, получим:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & L \vdash \Delta(p \to q) \to (\Delta' p \to \Delta' q); \\ \text{(b)} & L \vdash \Delta(p \to q) \to (\Delta' p \to \Delta q); \\ \text{(c)} & L \vdash \Delta'(p \to q) \to (\Delta p \to \Delta' q); \\ \text{(d)} & L \vdash \Delta(p \to q) \to (\Delta p \to \Delta q). \end{array}$$

Аналогичные рассуждения для аксиомы $(p \to \Box\Diamond p)$ приведут к условию $L \vdash (\neg\Delta'\neg p \wedge \Delta\neg\nabla\neg p) \ \vee \ (\Delta'\neg p \wedge \Delta'\neg\nabla\neg p)$, которое эквивалентно конъюнкции следующих двух условий (для удобства мы заменили $\neg p$ на p):

$$\begin{array}{ll} \text{(e)} & L \vdash \Delta' p \to \Delta'\neg\nabla p; \\ \text{(f)} & L \vdash \Delta' p \vee \Delta\neg\nabla p. \end{array}$$

Кроме того, M замкнута относительно правила Nec, поэтому множество ∇-переводов теорем логики M замкнуто в L относительно правила:

$$\text{(g)} \quad \text{если } L \vdash A, \text{ то } L \vdash \Delta A.$$

Так как $L \vdash \Delta(p \to p)$, то, подставив p вместо q в формулу (b), получим:
(h) $L \vdash \Delta' p \to \Delta p$. В силу (e) из (f) вытекает
(i) $L \vdash \Delta'\neg\nabla p \vee \Delta\neg\nabla p$, откуда по *схеме* (h) следует
(j) $L \vdash \Delta\neg\nabla p$; по определению ∇ это означает:
(k) $L \vdash \Delta(\ (\Delta p \to \neg p) \wedge (\Delta' p \to p)\ )$. Из условий (d) и (g) вытекает, что логика $L(\Delta)$ нормальная, поэтому справедлив принцип *монотонности*:
(l) $L \vdash \Delta(A \wedge B) \to \Delta A$, применяя который, мы из (k) получаем:
(m) $L \vdash \Delta(\Delta p \to \neg p)$, откуда ввиду дистрибутивности (d) имеем:
(n) $L \vdash \Delta\Delta p \to \Delta\neg p$. Из (m) по правилу (g) выводим:
(o) $L \vdash \Delta\Delta(\Delta p \to \neg p)$; применив к этой формуле *схему* (n), заключаем:
(p) $L \vdash \Delta(p \wedge \Delta p)$, отсюда по принципу монотонности:
(q) $L \vdash \Delta p$. Таким образом,
(r) $L \vdash \nabla p \leftrightarrow (\ p \vee \Delta' p\ )$, в частности
(s) $L \vdash \nabla\bot \leftrightarrow \Delta'\bot$. Теперь из (a) получаем: $L \vdash \Delta' p \to \Delta' q$, и значит:
(t) $L \vdash \Delta' p \leftrightarrow \Delta'\bot$. Условия (s) и (t) позволяют переписать (r) в виде:
(u) $L \vdash \nabla p \leftrightarrow (\ p \vee \nabla\bot\ )$, и в силу аксиоматики логики $L_{(\cdot),\top}$ (см. теорему 3.4) мы доказали требуемое включение: $L_{(\cdot),\top} \subseteq L(\nabla)$. ■

Чтобы получить следствия из доказанной теоремы для конкретных логик, докажем вспомогательные утверждения.

Лемма 5.9 *Логика GL модализирована.*

Доказательство. Рассмотрим разложение ($\sharp$) какой-либо формулы A. Допустим $GL \not\vdash B_{\overline{\sigma}}$ для некоторого $\overline{\sigma} \in \{\bot, \top\}^n$, тогда по теореме о полноте логики GL [1, с. 84] существует модель — конечное иррефлексивное транзитивное дерево с корнем r, такое что $r \not\models B_{\overline{\sigma}}$. Условие $r \not\models B_{\overline{\sigma}}$ не зависит от вынуждения переменных в точке r, поэтому мы можем изменить отношение $\models$ в этой точке, положив $r \models p_i \;\Leftrightarrow\; \sigma_i = \top$. Тогда $r \not\models A$, и значит $GL \not\vdash A$. $\blacksquare$

Лемма 5.10 *Если $K \not\vdash A$, то найдется такая модель Крипке* $(W, \mathrm{R}, \models)$ *и элемент $r \in W$, что $r \not\models A$ и не существует таких $x \in W$, что $x \mathrel{\mathrm{R}} r$.*

Доказательство. По теореме о полноте логики K [1, гл. 5] существует такая модель $\mathcal{M} = (W, \mathrm{R}, \models)$, что $r \not\models A$ для некоторого $r \in W$. Преобразуем ее в новую модель $\mathcal{M}' = (W', \mathrm{R}', \models')$. Положим $W' = W \cup \{r_0\}$, где $r_0 \notin W$. Отношение R' определим следующим образом:

- на элементах множества $W \setminus \{r\}$ отношение R' совпадает с R, то есть если $x, y \in W \setminus \{r\}$, то $x \mathrel{\mathrm{R}'} y \;\Leftrightarrow\; x \mathrel{\mathrm{R}} y$;

- в модели $\mathcal{M}'$ из r и r_0 достижимы те же точки множества $W \setminus \{r\}$, что и из r в исходной модели, то есть $r \mathrel{\mathrm{R}'} x \;\Leftrightarrow\; r_0 \mathrel{\mathrm{R}'} x \;\Leftrightarrow\; r \mathrel{\mathrm{R}} x$ для любого $x \in W \setminus \{r\}$;

- в модели $\mathcal{M}'$ элемент r_0 достижим из тех же элементов множества $W \setminus \{r\}$, из которых r достижим в исходной модели, то есть $x \mathrel{\mathrm{R}'} r_0 \;\Leftrightarrow\; x \mathrel{\mathrm{R}} r$ для любого $x \in W \setminus \{r\}$;

- если $r \mathrel{\mathrm{R}} r$, то положим $r \mathrel{\mathrm{R}'} r_0 \mathrel{\mathrm{R}'} r_0$.

Очевидно, что ни для какого $x \in W'$ не выполняется $x \mathrel{\mathrm{R}'} r$.

Пусть отношение $\models'$ продолжает отношение $\models$ на множество W' следующим образом: $r_0 \models' p \;\Leftrightarrow\; r \models p$ для любой переменной p. Теперь легко показать, что для любой формулы F имеет место:

$$r_0 \models' F \;\Leftrightarrow\; r \models F \quad \text{и} \quad \forall x \in W\ (x \models' F \;\Leftrightarrow\; x \models F).$$

Следовательно $r \not\models' A$. $\blacksquare$

Лемма 5.11 *Логики K и $K4$ модализированы.*

Доказательство дословно (с учетом леммы 5.10, которую легко перенести на логику $K4$) повторяет доказательство леммы 5.9. $\blacksquare$

Лемма 5.12 *Если L — модализированная логика, и X — множество модализированных формул, то LX — модализированная логика.*

Доказательство. Для любой формулы A условие $LX \vdash A$ эквивалентно тому, что $L \vdash \bigwedge \Gamma \to A$ для некоторого конечного множества $\Gamma \subseteq X$. Используя разложение ($\sharp$) формулы A, получаем разложение:

$$(\bigwedge \Gamma \to A) \;\leftrightarrow \bigvee_{\overline{\sigma} \in \{\bot, \top\}^n} \left(\overline{p}^{\,\overline{\sigma}} \wedge (\bigwedge \Gamma \to B_{\overline{\sigma}}) \right).$$

Из условия $LX \vdash A$ вытекает $L \vdash \bigwedge \Gamma \to A$, откуда $L \vdash \bigwedge \Gamma \to B_{\overline{\sigma}}$ для любого $\overline{\sigma} \in \{\bot, \top\}^n$, и значит $LX \vdash B_{\overline{\sigma}}$. ■

Следствие 5.13 *Модализированными являются логики доказуемости GL_α, D_β, GL_{β}-, где $\alpha, \beta \subseteq \omega$, $\omega \setminus \beta$ — конечно.*

Напомним обозначение модальности $\boxdot = (\cdot) \wedge \Box$.

Лемма 5.14 *Пусть логика L задана некоторым множеством аксиом и правил вывода, $L(\boxdot) \supseteq L$ и $L(\boxdot)$ замкнута относительно правил вывода логики L. Тогда $L(\boxdot) = L + \{\Box p \to p\}$.*

Доказательство. Включение ($\supseteq$) очевидно. Докажем обратное включение: $L(\boxdot) \subseteq L_1$, где $L_1 = L + \{\Box p \to p\}$. Поскольку $L_1 \vdash \Box p \leftrightarrow \boxdot p$, то $L_1 \vdash A \leftrightarrow tr_{\boxdot}(A)$ для любой формулы A. Пусть $A \in L(\boxdot)$, то есть $tr_{\boxdot}(A) \in L$, тогда $tr_{\boxdot}(A) \in L_1$, а значит $A \in L_1$. ■

Как известно [1, гл. 12], $GL(\boxdot) = Grz$. Из доказанной леммы вытекает, что $K(\boxdot) = T$, $K4(\boxdot) = S4$. Напомним определение логики B: $B = T + (A5)$, где (A5) — аксиома симметричности: $p \to \Box\Diamond p$.

Теорема 5.15 *Логики $K5$, B, $S5$, а также все расширения логики $S5$, не содержащие логику $L_{(\cdot),\top}$, не интерпретируются точно в логиках K, T, $K4$, $S4$, Grz, GL_α, D_β, GL_β-, где $\alpha, \beta \subseteq \omega$, $\omega \setminus \beta$ — конечно.*

Доказательство. Из теоремы 5.8 следует, что в классе нормальных логик, содержащих аксиому симметричности, существует лишь три логики, которые могут точно интерпретироваться в модализированных логиках: это $L_{(\cdot)}$, $L_\top$ и $L_{(\cdot),\top}$. Далее, в статье [11] доказано, что все расширения логики $S5$ нормальны. Поэтому для логик K, $K4$, GL_α, D_β и GL_β- утверждение теоремы вытекает из их модализированности. Для логик T, $S4$

и Grz доказываемое утверждение следует из транзитивности отношения $\hookrightarrow$ и того, что $T \hookrightarrow K$, $S4 \hookrightarrow K4$ и $Grz \hookrightarrow GL$. ■

Приведем теперь пример серии логик доказуемости, в которых логика GL точно интерпретируется.

Теорема 5.16 *$GL \hookrightarrow GL_\alpha$ для любого конечного множества $\alpha \subset \omega$.*

Доказательство. Воспользуемся *итеративностью* [10] логики GL: $GL(\Box^n) = GL$, при любом $n \geq 1$. Возьмем такое $k \geq 1$, что выполняется $\alpha \subseteq [0, k) = \{n \in \omega \mid n < k\}$. Рассмотрим два случая:

$0 \notin \alpha$. Покажем, что $GL_\alpha(\Box^k) = GL(\Box^k)$. Включение $(\supseteq)$ очевидно. Пусть $A \in GL_\alpha(\Box^k)$, то есть $GL_\alpha \vdash tr_{\Box^k}(A)$. Тогда след последней формулы $t(tr_{\Box^k}(A)) \subseteq \alpha \subseteq [0, k)$. Очевидно, что в любой GL-модели в точках глубины, меньшей, чем k, вынуждение формул $tr_{\Box^k}(A)$ и $tr_\top(A)$ одинаково. Но в силу очевидного включения $GL_\alpha \subseteq L_\top$ формула $tr_\top(A)$ есть тавтология и поэтому она (а следовательно и $tr_{\Box^k}(A)$) не опровергается ни в какой модели. Отсюда следует $GL \vdash tr_{\Box^k}(A)$ и значит $A \in GL(\Box^k)$.

$0 \in \alpha$. В этом случае покажем, что $GL_\alpha(\Box^{k+1}) = GL(\Box^{k+1})$. Здесь также достаточно доказать включение $(\subseteq)$.

Обозначим $F_\alpha = \bigwedge\limits_{n \in \alpha} F_n$. Очевидно, что $GL_\alpha \vdash B \;\Leftrightarrow\; GL \vdash F_\alpha \to B$. Пусть $A \notin GL(\Box^{k+1})$, тогда существует дерево $(W, \prec, \models)$ с корнем r, такое, что $r \not\models tr_{\Box^{k+1}}(A)$. Если $d(r) < k$, то мы дополним шкалу $(W, \prec)$ цепью новых элементов $x_k \prec x_{k-1} \prec \ldots \prec x_{d(r)} = r$ (так что $d(x_k) = k$), и доопределим отношение $\models$ так, чтобы в точках x_k и r вынуждались одни и те же переменные. Тогда в точках x_k и r будут истинными одни и те же формулы вида $tr_{\Box^{k+1}}(F)$, в частности $x_k \not\models tr_{\Box^{k+1}}(A)$.

Таким образом, мы можем считать, что $d(r) \geq k$, но тогда $r \models F_\alpha$, так как $t(F_\alpha) = \alpha \subseteq [0, k)$. Следовательно $r \not\models F_\alpha \to tr_{\Box^{k+1}}(A)$, а значит $GL \nvdash F_\alpha \to tr_{\Box^{k+1}}(A)$ и $A \notin GL_\alpha(\Box^{k+1})$. ■

Автор выражает глубокую благодарность Е.Ю.Ногиной и Т.Л.Сидон за ряд полезных замечаний и помощь при работе над текстом.

Список литературы

[1] Boolos G., Logic of Provability, Cambridge University Press, 1993.

[2] Фейс Р., Модальная логика, М., 1974.

[3] Makinson D., There are infinitely many Diodorean modal functions, Journal of Symbolic Logic, 31(1966), num. 4, p. 406–408.

[4] Sugihara T., The number of modalities in T supplemented by the axiom CL^2pL^3p, Journal of Symbolic Logic, 27(1962), num. 4, p. 407–408.

[5] Артемов С.Н., О модальных логиках, аксиоматизирующих доказуемость, Изв. АН СССР, Серия матем., т. 49, 6(1985), с. 1123–1155.

[6] Беклемишев Л.Д., О классификации пропозициональных логик доказуемости, Изв. АН СССР, Серия матем., т. 53, 5(1989), с. 915–943.

[7] Visser A., The provability logics of recursively enumerable theories, Journal of Philosophical Logic, 13(1984), p. 97–113.

[8] Zeman J., Modal systems in which necessity is "factorable", Notre Dame Journal of Formal Logic, 10(1969), p. 247–256.

[9] Makinson D., Some embedding theorems for modal logic, Notre Dame Journal of Formal Logic, 12(1971), 252–254.

[10] Абашидзе М.А., Свойство итеративности в логиках доказуемости, Тезисы 8 Всесоюзн. конф. по мат. логике, Москва, сент. 1986, с. 4.

[11] Scroggs S.J., Extensions of the Lewis system $S5$, Journal of Symbolic Logic, 16(1951), num. 2, p. 407–408.