УДК 510.643

Секвенциальная логика арифметической разрешимости

Евгений Золин

1. Введение. Изучение одного из центральных понятий математической логики — доказуемости — средствами модальной логики восходит к работам И. Орлова [1] и К. Гёделя [2]. Независимо друг от друга они сформулировали систему, известную сейчас как **S4**, оставив открытым вопрос о ее формальной доказуемостной интерпретации (на самом деле, логика **S4** неполна и даже несовместна с “правильной” логикой доказуемости). Возникла задача описания всех модальных законов, справедливых при интерпретации формул вида $\Box A$ как ‘утверждение A доказуемо в арифметике Пеано **PA**’. Несколько позже М. Лёб [3] предложил новый корректный принцип доказуемости (так называемую аксиому Лёба), и появилась система, называемая теперь логикой Гёделя-Лёба **GL**, относительно которой была высказана гипотеза, что **GL** описывает в точности все законы доказуемости в **PA**. Наконец, Р. Соловэй [4] подтвердил данную гипотезу, доказав арифметическую полноту логики **GL**.

Важным понятием, связанным с доказуемостью в формальной теории, является разрешимость: утверждение называется *разрешимым* в теории, если в ней доказуемо либо оно, либо его отрицание. Так, согласно теореме Гёделя о неполноте, существуют неразрешимые в **PA** утверждения. Оператор разрешимости, который мы будем обозначать символом $\rhd$, выражается через оператор доказуемости $\Box$ посредством равенства $\rhd A = \Box A \vee \Box\neg A$. Естественным образом возникает задача описания всех законов, которым подчиняется оператор $\rhd$ в модальной логике L, то есть задача аксиоматизации *логики разрешимости* над L (точные определения см. ниже).

Подобная задача, вне связи с доказуемостной интерпретацией, уже исследовалась для некоторых логик L. В работах [5, 6] предложены различные аксиоматики логик разрешимости над **T**, **S4** и **S5**; в статьях [7, 8] аксиоматизированы логики разрешимости над **K** и **K4**.

В настоящей статье мы представляем аксиоматику логики разрешимости над **GL**, то есть логики, полной при интерпретации формул вида $\rhd A$ как ‘утверждение A разрешимо в **PA**’. Построены также секвенциальные исчисления для логик разрешимости над **K**, **K4** и **GL**. Наша аксиоматика логик разрешимости над **K** и **K4** несколько отличается от предложенной в работах [7, 8] и более близка по виду к аксиоматике логик **K** и **K4**.

2. Определения. Пропозициональный модальный язык ($\Box$-*язык*) содержит множество переменных $\mathbb{P} = \{p_0, p_1, \ldots\}$, булевы связки $\bot$ (ложь), $\to$ (импликация) и одноместный оператор $\Box$. Другие связки вводятся как сокращения, в частности: $\neg A \leftrightharpoons A \to \bot$. Множество $\Box$-*формул* $\mathbf{Fm}^\Box$ определяется обычным образом. *Минимальная нормальная* логика **K** имеет следующие аксиомы и правила вывода (здесь $A[B/p]$ — результат подстановки в A формулы B вместо всех вхождений переменной p):

$(\mathsf{A}^\Box_\mathsf{T})$ классические тавтологии в $\Box$-языке

$(\mathsf{A}^\Box_\mathbf{K})$ $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ (дистрибутивность)

$$(\mathsf{MP})\ \frac{A \quad A \to B}{B} \qquad (\mathsf{Sub})\ \frac{A}{A[B/p]} \qquad (\mathsf{Nec})\ \frac{A}{\Box A}$$

Нас будут интересовать следующие системы: $\mathbf{K4} = \mathbf{K} + (\mathsf{A}^\Box_\mathbf{4})$, $\mathbf{GL} = \mathbf{K} + (\mathsf{A}^\Box_\mathbf{L})$, где

$(\mathsf{A}^\Box_\mathbf{4})$ $\Box p \to \Box\Box p$ (транзитивность)

$(\mathsf{A}^\Box_\mathbf{L})$ $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$ (аксиома Лёба)

Имеют место следующие строгие включения: $\mathbf{K} \subset \mathbf{K4} \subset \mathbf{GL}$.

Секвенция есть выражение вида $\Pi \Rightarrow \Sigma$, где Π и Σ — конечные мультимножества[1] формул. Включение мультимножеств формул понимаем без учета кратности вхождения формул в них, то

[1] Под *мультимножеством* мы понимаем множество с указанием кратности ($\geqslant 0$) вхождения элементов. Формально, мультимножество $\Box$-формул есть отображение $\mathbf{Fm}^\Box \to \mathbb{N}$.

есть запись $\Pi \subseteq \Sigma$ означает, что всякая формула из Π входит в Σ. Мы обозначаем $\Pi\Sigma := \Pi \cup \Sigma$ и $\Pi A := \Pi \cup \{A\}$. Множество подформул формулы A обозначаем $\mathrm{Sb}\, A$, и если Γ — (мульти)множество формул, то $\mathrm{Sb}\,\Gamma := \bigcup\{\mathrm{Sb}\, A \mid A \in \Gamma\}$. Если секвенция $\Pi \Rightarrow \Sigma$ обозначена как w, то обозначим ее антецедент $\langle w| := \Pi$, сукцедент $|w\rangle := \Sigma$, множество подформул $\mathrm{Sb}\, w := \mathrm{Sb}\,\Pi\Sigma$. Пишем $A \in w$, если $A \in \Pi\Sigma$; а также $\Gamma \subseteq w$, если $\Gamma \subseteq \Pi\Sigma$, и $w \subseteq \Gamma$, если $\Pi\Sigma \subseteq \Gamma$. Если $\mathcal{L}$ — секвенциальное исчисление, то запись $\mathcal{L} \vdash A \Leftrightarrow B$ означает: $\mathcal{L} \vdash A \Rightarrow B$ и $\mathcal{L} \vdash B \Rightarrow A$.

Для формулировки логик разрешимости введем $\triangleright$-язык, отличающийся от $\Box$-языка лишь заменой символа $\Box$ на $\triangleright$, и множество $\triangleright$-*формул* $\mathbf{Fm}^{\triangleright}$. Допуская вольность в обозначениях, мы иногда пишем $\triangleright A$, где A есть $\Box$-формула, подразумевая $\Box A \vee \Box\neg A$; такое использование символа $\triangleright$ легко распознать по контексту. Далее зададим $\triangleright$-перевод $(\cdot)_{\triangleright}\colon \mathbf{Fm}^{\triangleright} \to \mathbf{Fm}^{\Box}$, сохраняющий переменные и булевы связки и $(\triangleright A)_{\triangleright} = \Box(A_{\triangleright}) \vee \Box\neg(A_{\triangleright})$. Теперь *логикой разрешимости* над логикой L назовем множество $\triangleright$-формул, $\triangleright$-переводы которых являются теоремами логики L:

$$L^{\triangleright} := \{A \in \mathbf{Fm}^{\triangleright} \mid A_{\triangleright} \in L\}.$$

Семантика Крипке для $\Box$- и $\triangleright$-языков вводится обычным образом. Отношение достижимости в шкале и обратное к нему мы будем обозначать $\uparrow$ и $\downarrow$ соответственно; при этом кванторы по точкам, достижимым из данной точки w, будут записываться как $\forall x{\downarrow}w$ и $\exists x{\downarrow}w$. В этих обозначениях модальный пункт определения истинности $\triangleright$-формулы в точке модели имеет вид:

$$w \models \triangleright A \quad \leftrightharpoons \quad \bigl(\forall x{\downarrow}w \quad x \models A\bigr) \text{ или } \bigl(\forall x{\downarrow}w \quad x \not\models A\bigr).$$

Очевидно, что $w \models A \Leftrightarrow w \models A_{\triangleright}$ для любой $\triangleright$-формулы A. Если Γ — множество формул, то Γ-*шкалой* называется шкала, на которой общезначимо Γ. Под истинностью (общезначимостью) секвенции $\Pi \Rightarrow \Sigma$ подразумеваем истинность (общезначимость) формулы $\bigwedge\Pi \to \bigvee\Sigma$.

3. Аксиоматика. Исчисление $\mathbf{K}^{\triangleright}$ задается следующими аксиомами и правилами (MP), (Sub) и (Dec):

$(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\top})$	классические тавтологии в $\triangleright$-языке		
$(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\neg})$	$\triangleright p \leftrightarrow \triangleright\neg p$	(зеркальность)	(Dec) $\dfrac{A}{\triangleright A}$
$(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\leftrightarrow})$	$\triangleright(p \leftrightarrow q) \to (\triangleright p \leftrightarrow \triangleright q)$	(эквивалентная замена)	
$(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\vee})$	$\triangleright p \to [\triangleright(q \to p) \vee \triangleright(p \to r)]$	(дихотомия)	

Логики $\mathbf{K4}^{\triangleright}$ и $\mathbf{GL}^{\triangleright}$ имеют аксиоматику[2]: $\mathbf{K4}^{\triangleright} = \mathbf{K}^{\triangleright} + (\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{4}})$, $\mathbf{GL}^{\triangleright} = \mathbf{K4}^{\triangleright} + (\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{L}})$, где

$(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{4}})$	$\triangleright p \to \triangleright(q \to \triangleright p)$	(слабая транзитивность)
$(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{L}})$	$\triangleright(\triangleright p \to p) \to \triangleright p$	(аксиома Лёба)

Секвенциальное исчисление $[L^{\triangleright}]$ для логики разрешимости над $L \in \{\mathbf{K}, \mathbf{K4}, \mathbf{GL}\}$ получается добавлением к секвенциальному исчислению высказываний (с сечением) правил $(\overset{\triangleright}{\neg}\Rightarrow)$, $(\Rightarrow\overset{\triangleright}{\neg})$, $(\Rightarrow\overset{\triangleright}{\vee})$, $(\Rightarrow\overset{\triangleright}{\leftrightarrow})$ и $(\Rightarrow\overset{\triangleright}{L})$, представленных на рис. 1, где используется обозначение: $(\Pi \vee A) := \{(\pi \vee A) \mid \pi \in \Pi\}$.

Доказательство теоремы о полноте основано на комбинации, с одной стороны, конструкции канонической модели, приспособленной в работах [7, 8] для применения к $\triangleright$-логикам, а с другой, метода пополнения секвенций, применяемого для доказательства полноты секвенциальных исчислений. Сначала докажем две вспомогательные леммы.

Лемма 1 $\mathbf{K}^{\triangleright} \vdash \triangleright p \mathbin{\&} \triangleright q \to \triangleright(p \mathbin{\&} q)$.

Доказательство. Имеем следующий вывод в $\mathbf{K}^{\triangleright}$ (записанный схематично):

$\mathbf{K}^{\triangleright} \vdash \triangleright[p \to q] \xleftrightarrow{1} \triangleright[p \leftrightarrow (p \mathbin{\&} q)] \xrightarrow{2} [\triangleright p \to \triangleright(p \mathbin{\&} q)]$.

[2] **Гипотеза:** аксиома $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{4})$ в формулировке исчисления $\mathbf{GL}^{\triangleright}$ является лишней.

$$(\Rightarrow^{\rhd}_{\vee})\ \frac{\Pi \Rightarrow \Sigma, \rhd A}{\Pi \Rightarrow \Sigma, \rhd(B \to A), \rhd(A \to C)} \qquad (\Rightarrow^{\rhd}_{\leftrightarrow})\ \frac{\Pi, A \Rightarrow B, \Sigma \quad \Pi, B \Rightarrow A, \Sigma}{\Pi, \rhd A \Rightarrow \rhd B, \Sigma}$$

$$({}^{\rhd}_{\neg}\Rightarrow)\ \frac{\rhd A, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\rhd\neg A, \Pi \Rightarrow \Sigma} \qquad (\Rightarrow^{\rhd}_{\neg})\ \frac{\Pi \Rightarrow \Sigma, \rhd A}{\Pi \Rightarrow \Sigma, \rhd\neg A} \qquad (\Rightarrow^{\rhd}_{\mathbf{K}})\ \frac{\Pi \Rightarrow A}{\rhd(\Pi \vee A) \Rightarrow \rhd A}$$

$$(\Rightarrow^{\rhd}_{\mathbf{K4}})\ \frac{\Pi, \rhd\Sigma \Rightarrow A}{\rhd(\Pi \vee A), \rhd\Sigma \Rightarrow \rhd A} \qquad (\Rightarrow^{\rhd}_{\mathbf{GL}})\ \frac{\rhd A, \Pi, \rhd\Sigma \Rightarrow A}{\rhd(\Pi \vee A), \rhd\Sigma \Rightarrow \rhd A}$$

Рис. 1: Правила исчислений $[\mathbf{K}^{\rhd}]$, $[\mathbf{K4}^{\rhd}]$ и $[\mathbf{GL}^{\rhd}]$.

Здесь эквивалентность '$\overset{1}{\longleftrightarrow}$' получена из тавтологии $[p \to q] \leftrightarrow [p \leftrightarrow (p \,\&\, q)]$ по аксиоме $(\mathsf{A}^{\rhd}_{\leftrightarrow})$, а импликация '$\overset{2}{\longrightarrow}$' является подстановочным примером аксиомы $(\mathsf{A}^{\rhd}_{\leftrightarrow})$. Аналогично выводим:

$\mathbf{K}^{\rhd} \vdash \rhd[q \to p] \to [\rhd q \to \rhd(p \,\&\, q)]$. Наконец, используя аксиому дихотомии $(\mathsf{A}^{\rhd}_{\vee})$, получаем:

$$\mathbf{K}^{\rhd} \vdash \rhd p \longrightarrow \{\rhd(q \to p) \vee \rhd(p \to q)\} \longrightarrow \{[\rhd p \to \rhd(p \,\&\, q)] \vee [\rhd q \to \rhd(p \,\&\, q)]\} \longleftrightarrow$$
$$\longleftrightarrow \{(\rhd p \,\&\, \rhd q) \to \rhd(p \,\&\, q)\}.$$

Остается заметить, что в формуле $\rhd p \to \{(\rhd p \,\&\, \rhd q) \to \rhd(p \,\&\, q)\}$ первая посылка $\rhd p$ лишняя. $\dashv$

Лемма 2 $\mathbf{K4}^{\rhd} \vdash \rhd(p \vee q) \to \rhd[p \vee (\rhd q \to q)]$.

Доказательство. Поскольку полнота аксиоматики $\mathbf{K4}^{\rhd}$ к моменту использования этой леммы[3] будет уже доказана, то мы можем строить вывод не в $\mathbf{K4}^{\rhd}$, а в $\mathbf{K4}$. С одной стороны:

$\mathbf{K} \vdash \Box(p \vee q) \to \Box[p \vee (\rhd q \to q)]$ по монотонности. С другой:

$$\mathbf{K4} \vdash \Box\neg(p \vee q) \longleftrightarrow \Box(\neg p \,\&\, \neg q) \longleftrightarrow [\Box\neg p \,\&\, \Box\neg q] \longrightarrow [\Box\neg p \,\&\, \Box\neg q \,\&\, \Box\Box\neg q] \longrightarrow$$
$$\to [\Box\neg p \,\&\, \Box\neg q \,\&\, \Box\rhd q] \longleftrightarrow \Box(\neg p \,\&\, \neg q \,\&\, \rhd q) \longleftrightarrow \Box\neg[p \vee (\rhd q \to q)] \longrightarrow \rhd[p \vee (\rhd q \to q)]. \qquad \dashv$$

Теорема 3 (О полноте) *Для каждой логики $L \in \{\mathbf{K}, \mathbf{K4}, \mathbf{GL}\}$ и любой секвенции $\Pi \Rightarrow \Sigma$ в $\rhd$-языке эквивалентны следующие утверждения:*

(1) $[L^{\rhd}] \vdash \Pi \Rightarrow \Sigma$,

(2) $L^{\rhd} \vdash \bigwedge\Pi \to \bigvee\Sigma$,

(3) $L \vdash (\bigwedge\Pi \to \bigvee\Sigma)_{\rhd}$,

(4) $F \models \Pi \Rightarrow \Sigma$ *для любой конечной L-шкалы F.*

Доказательство проведем по схеме (1)⇒(2)⇒(3)⇔(4)⇒(1). Эквивалентность (3)⇔(4) есть известная (см. [9, 10]) теорема о полноте логик L относительно конечных L-шкал[4]. В дальнейшем мы называем $\rhd$-формулы просто формулами.

<u>(1) ⇒ (2)</u> В построенных ниже выводах используется следующий факт из логики высказываний: если доказуема импликация $P \to A$, то доказуема и эквивалентность $[P \vee A] \leftrightarrow A$. Далее мы считаем, что $\Pi = \{\pi_1, \ldots, \pi_m\}$ и $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$, где $m, n \geqslant 0$.

<u>$L = \mathbf{K}$.</u> Пусть $\mathbf{K}^{\rhd} \vdash \bigwedge\Pi \to A$. Используя последовательно лемму 1, аксиому $(\mathsf{A}^{\rhd}_{\leftrightarrow})$ и упомянутый выше факт, получаем следующий вывод:

$$\mathbf{K}^{\rhd} \vdash \bigwedge\rhd(\pi_i \vee A) \longrightarrow \rhd[\bigwedge(\pi_i \vee A)] \longleftrightarrow \rhd(\bigwedge\Pi \vee A) \longleftrightarrow \rhd A.$$

<u>$L = \mathbf{K4}$.</u> Пусть $\mathbf{K4}^{\rhd} \vdash \bigwedge(\Pi, \rhd\Sigma) \to A$. Пользуясь аксиомой $(\mathsf{A}^{\rhd}_{4})$ в форме $\rhd\sigma \to \rhd(A \vee \rhd\sigma)$, выводим:

$$\mathbf{K4}^{\rhd} \vdash [\bigwedge\rhd(\pi_i \vee A) \,\&\, \bigwedge\rhd\sigma_j] \longrightarrow [\rhd(\bigwedge\pi_i \vee A) \,\&\, \bigwedge\rhd(A \vee \rhd\sigma_j)] \longrightarrow$$
$$\to [\rhd(\bigwedge\Pi \vee A) \,\&\, \rhd(\bigwedge\rhd\Sigma \vee A)] \longrightarrow \rhd[\bigwedge(\Pi, \rhd\Sigma) \vee A] \longleftrightarrow \rhd A.$$

[3] Данная лемма нам потребуется при доказательстве полноты аксиоматики логики разрешимости над $\mathbf{GL}$; только для доказательства этой леммы нужна аксиома $(\mathsf{A}^{\rhd}_{4})$ в формулировке исчисления $\mathbf{GL}^{\rhd}$.

[4] Напомним, что $\mathbf{K}$ общезначима на любой шкале; класс $\mathbf{K4}$-шкал есть класс всех транзитивных шкал; класс конечных $\mathbf{GL}$-шкал состоит из конечных иррефлексивных транзитивных шкал.

$\underline{L = \mathbf{GL}.}$ Пусть $\mathbf{GL}^{\triangleright} \vdash \bigwedge(\Pi, \triangleright\Sigma) \to (\triangleright A \to A)$. Выше мы доказали, что
$\mathbf{K4}^{\triangleright} \vdash [\bigwedge\triangleright(\pi_i \vee A) \,\&\, \bigwedge\triangleright\sigma_j] \longrightarrow \triangleright[\bigwedge(\Pi, \triangleright\Sigma) \vee A]$. Пользуясь леммой 2, имеем:
$\mathbf{K4}^{\triangleright} \vdash \triangleright[\bigwedge(\Pi, \triangleright\Sigma) \vee A] \longrightarrow \triangleright[\bigwedge(\Pi, \triangleright\Sigma) \vee (\triangleright A \to A)]$. Наконец, используя $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{L}})$, получаем:
$\mathbf{GL}^{\triangleright} \vdash \triangleright[\bigwedge(\Pi, \triangleright\Sigma) \vee (\triangleright A \to A)] \longleftrightarrow \triangleright(\triangleright A \to A) \longrightarrow \triangleright A$.

$\underline{(2) \Rightarrow (3)}$ Аксиомы $\mathbf{K}^{\triangleright}$ общезначимы на любой шкале, поэтому их $\triangleright$-переводы доказуемы в $\mathbf{K}$.
Выведем $\triangleright$-перевод аксиомы $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{4}})$ в логике $\mathbf{K4}$. С одной стороны:
$\mathbf{K4} \vdash \Box p \longrightarrow \Box\Box p \longrightarrow \Box\triangleright p \longrightarrow \Box(q \to \triangleright p) \longrightarrow \triangleright(q \to \triangleright p)$.
С другой: $\mathbf{K4} \vdash \Box\neg p \to \triangleright(q \to \triangleright p)$.
Выведем $\triangleright$-перевод аксиомы $(\mathsf{A}^{\triangleright}_{\mathbf{L}})$ в $\mathbf{GL}$. Из тавтологии $(\triangleright p \to p) \to (\Box p \to p)$ получаем:
$\mathbf{GL} \vdash \Box(\triangleright p \to p) \longrightarrow \Box(\Box p \to p) \longrightarrow \Box p \longrightarrow \triangleright p$. В то же время;
$\mathbf{GL} \vdash \Box\neg(\triangleright p \to p) \longleftrightarrow \Box(\triangleright p \,\&\, \neg p) \longrightarrow \Box\neg p \longrightarrow \triangleright p$.

$\underline{(4) \Rightarrow (1)}$ Обозначим секвенциальное исчисление $\mathcal{L} := [L^{\triangleright}]$. Положим $\overline{A} := B$, если A графически равна $\neg B$, в противном случае положим $\overline{A} := \neg A$. Для множества формул Γ положим $\overline{\Gamma} := \{\overline{A} \mid A \in \Gamma\}$. Множество Γ назовем *замкнутым*, если $\mathrm{Sb}\,\Gamma \subseteq \Gamma$ и $\overline{\Gamma} \subseteq \Gamma$. Очевидно, что всякое конечное множество формул содержится в некотором *конечном* замкнутом множестве. Секвенцию w назовем Γ-*полной*, если $\Gamma \subseteq w$; *тонкой*, если $\langle w|$ и $|w\rangle$ суть множества, то есть формулы в них не повторяются.

Допустим, что $\mathcal{L} \nvdash \Pi \Rightarrow \Sigma$. Положим: $\Gamma := \mathrm{Sb}\,\Pi\Sigma$, $\natural\Gamma := \{A, \overline{A} \mid \triangleright A \in \Gamma\}$, $\beta := \Gamma \cup \mathrm{Sb}\{\triangleright(A \vee B) \mid A, B \in \natural\Gamma\}$, $\widehat{\Gamma} := \beta \cup \overline{\beta}$. Очевидно, что множество $\widehat{\Gamma}$ замкнуто. Для произвольной формулы $A \in \natural\Gamma$ обозначим: $\boxtimes A := \{\triangleright(B \vee A) \mid B \in \natural\Gamma\} \subseteq \beta$. В дальнейших рассуждениях символ $\boxtimes$ будет играть роль, аналогичную роли оператора $\Box$ в стандартной процедуре построения канонической модели нормальной логики. В то же время, эти символы имеют разные “типы”: если $\Box$ был оператором, преобразующим формулу в формулу, то $\boxtimes$ преобразует формулу в множество формул. Следует также отметить, что семантически оператор $\boxtimes$ не эквивалентен оператору $\Box$.

Мы построим конечную контрмодель для секвенции $\Pi \Rightarrow \Sigma$. Носитель модели: $W^{\Gamma}_{\mathcal{L}} := \{w \subseteq \widehat{\Gamma} \mid w$ есть тонкая $\widehat{\Gamma}$-полная секвенция, $\mathcal{L} \nvdash w\}$. Очевидно, что $W^{\Gamma}_{\mathcal{L}}$ — конечное множество. Ввиду наличия в исчислении $\mathcal{L}$ сечения (и сокращения) всякую невыводимую в $\mathcal{L}$ секвенцию, состоящую из формул множества Γ, можно расширить до тонкой $\widehat{\Gamma}$-полной невыводимой в $\mathcal{L}$ секвенции. В частности, поскольку секвенция $\Pi \Rightarrow \Sigma$ невыводима в $\mathcal{L}$, то $\exists z \in W^{\Gamma}_{\mathcal{L}}\colon\ \Pi \subseteq \langle z|,\ \Sigma \subseteq |z\rangle$, и значит, $W^{\Gamma}_{\mathcal{L}} \neq \varnothing$. Далее, зададим оценку переменных: $w \models p \ \leftrightharpoons\ p \in \langle w|$, для любых $w \in W^{\Gamma}_{\mathcal{L}}$ и $p \in \mathbb{P}$.

Сформулируем условие на $\uparrow$, выполнения которого для нас достаточно.

$$\langle 1^{\triangleright} \rangle \qquad \forall w \in W^{\Gamma}_{\mathcal{L}}\ \forall A \in \Gamma. \qquad w \models A \Leftrightarrow A \in \langle w|.$$

Действительно, для указанного выше $z \in W^{\Gamma}_{\mathcal{L}}$ по $\langle 1^{\triangleright} \rangle$ заключаем $z \models \bigwedge\Pi$ и $z \models \bigwedge\neg\Sigma$, а следовательно, $z \not\models \Pi \Rightarrow \Sigma$ и $M^{\Gamma}_{\mathcal{L}} \not\models \Pi \Rightarrow \Sigma$.

Условие $\langle 1^{\triangleright} \rangle$ на $\uparrow$ сформулировано в виде связи отношения $\models$ и принадлежности формул антецедентам секвенций из $W^{\Gamma}_{\mathcal{L}}$. В определении истинности формулы в точке зависимость от $\uparrow$ имеется лишь в пункте, касающемся модальности $\triangleright$. Поэтому достаточно наложить на $\uparrow$ следующее условие (квадратная скобка означает дизъюнкцию условий):

$$\langle 2^{\triangleright} \rangle \qquad \forall w \in W^{\Gamma}_{\mathcal{L}}\ \forall \triangleright A \in \Gamma. \qquad \triangleright A \in \langle w| \ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \forall x{\downarrow}w & A \in \langle x|, \\ \forall x{\downarrow}w & A \in |x\rangle. \end{array}\right.$$

Импликация $\langle 2^{\triangleright} \rangle \Rightarrow \langle 1^{\triangleright} \rangle$ доказывается одновременно для всех $w \in W^{\Gamma}_{\mathcal{L}}$ индукцией по построению формулы A; доказательство дословно повторяет рассуждение, проводимое для $\Box$-логик.

Для любого множества $\Phi \subseteq \natural\Gamma$ обозначим $\sharp\Phi := \{A \in \natural\Gamma \mid \boxtimes A \subseteq \Phi\}$. Легко проверить, что справедливы следующие включения: $\boxtimes\sharp\Phi \subseteq \Phi \subseteq \sharp\boxtimes\Phi$. Далее, для $w \in W^{\Gamma}_{\mathcal{L}}$ положим: $\sharp w := \sharp\langle w|$. Наконец, зададим отношение $\uparrow$ следующим образом (фигурная скобка означает конъюнкцию условий):

$$\begin{array}{lll} \langle 3^{\triangleright}_{\mathbf{K}} \rangle & w{\uparrow}x \ \leftrightharpoons & \sharp w \subseteq \langle x|; \\ \langle 3^{\triangleright}_{\mathbf{4}} \rangle & w{\uparrow}x \ \leftrightharpoons & \sharp w \subseteq (\sharp x \cap \langle x|); \\ \langle 3^{\triangleright}_{\mathbf{L}} \rangle & w{\uparrow}x \ \leftrightharpoons & \left\{\begin{array}{l} \sharp w \subseteq (\sharp x \cap \langle x|), \\ \exists A \in \natural\Gamma. \quad \triangleright A \in |w\rangle \ \,\&\,\ \triangleright A \in \langle x|. \end{array}\right. \end{array}$$

Лемма 3.1 (О дихотомии) *Если* $\rhd A \in \Gamma$ *и* $\rhd A \in \langle w|$, *то* $\big(A \in \sharp w$ *или* $\overline{A} \in \sharp w\big)$.

▶ Допустим противное, тогда ввиду $A \in \natural\Gamma$ получаем:

1) $\boxtimes A \not\subseteq \langle w|$, то есть $\exists B \in \natural\Gamma$: $\rhd(B \vee A) \notin \langle w|$, но так как $\rhd(B \vee A) \in \beta$, то $\rhd(B \vee A) \in |w\rangle$.

2) $\boxtimes \overline{A} \not\subseteq \langle w|$, то есть $\exists C \in \natural\Gamma$: $\rhd(C \vee \overline{A}) \notin \langle w|$, но так как $\rhd(C \vee \overline{A}) \in \beta$, то $\rhd(C \vee \overline{A}) \in |w\rangle$.

Однако $\mathcal{L} \vdash \rhd A \Rightarrow \rhd(B \vee A), \rhd(C \vee \overline{A})$; эта секвенция получается по правилу $(\Rightarrow^{\rhd}_{\vee})$, учитывая, что из $\mathcal{L} \vdash (B \vee A) \Leftrightarrow (\neg B \to A)$ по правилу $(\Rightarrow^{\rhd}_{\leftrightarrow})$ выводится, что $\mathcal{L} \vdash \rhd(B \vee A) \Leftrightarrow \rhd(\neg B \to A)$, и аналогично $\mathcal{L} \vdash \rhd(C \vee \overline{A}) \Leftrightarrow \rhd(A \to C)$. Таким образом, $\mathcal{L} \vdash w$, что противоречит условию. ◀

Лемма 3.2 (Основная) $\langle 3^{\rhd}_{\mathfrak{S}} \rangle \Rightarrow \langle 2^{\rhd} \rangle$ *для каждого* $\mathfrak{S} \in \{\mathbf{K}, \mathbf{4}, \mathbf{L}\}$.

▶ Докажем эквивалентность в $\langle 2^{\rhd} \rangle$. Берем любой $w \in W^{\Gamma}_{\mathcal{L}}$ и произвольную формулу $\rhd A \in \Gamma$.

$(\Rightarrow)$ Пусть $\rhd A \in \langle w|$. По лемме о дихотомии возможны два случая:

1) $A \in \sharp w$, тогда по $\langle 3^{\rhd}_{L} \rangle$ заключаем: $\forall x{\downarrow}w\ A \in \langle x|$.

2) $\overline{A} \in \sharp w$, тогда аналогично $\forall x{\downarrow}w\ \overline{A} \in \langle x|$. Но $A \in \natural\Gamma \subseteq \widehat{\Gamma}$, значит $A \in x$ в силу $\widehat{\Gamma}$-полноты x; однако невозможно $A \in \langle x|$, иначе $\mathcal{L} \vdash x$. Значит, $A \in |x\rangle$.

$(\Leftarrow)$ Пусть $\rhd A \notin \langle w|$, что в силу $\widehat{\Gamma}$-полноты w означает $\rhd A \in |w\rangle$.

$\underline{\mathfrak{S} = \mathbf{K}.}$ Возьмем $\Pi := \sharp w$ и докажем, что $\mathcal{L} \nvdash \Pi \Rightarrow A$. Допустим противное, тогда по правилу $(\Rightarrow^{\rhd}_{\mathbf{K}})$ выводим: $\mathcal{L} \vdash \rhd(\Pi \vee A) \Rightarrow \rhd A$. Далее, поскольку $\forall \pi \in \Pi$ имеем $\pi \in \sharp w$, то есть $\boxtimes\pi \subseteq \langle w|$, то $\forall \alpha \in \natural\Gamma$: $\rhd(\alpha \vee \pi) \in \langle w|$. Ввиду очевидной выводимости $\mathcal{L} \vdash \rhd(\alpha \vee \pi) \Leftrightarrow \rhd(\pi \vee \alpha)$, отсюда получаем: $\forall \alpha \in \natural\Gamma$: $\rhd(\pi \vee \alpha) \in \langle w|$. В частности, для $\alpha := A$ заключаем: $\rhd(\pi \vee A) \in \langle w|$. Таким образом, $\rhd(\Pi \vee A) \subseteq \langle w|$, $\rhd A \in |w\rangle$ и $\mathcal{L} \vdash \rhd(\Pi \vee A) \Rightarrow \rhd A$; следовательно, $\mathcal{L} \vdash w$, что противоречит условию.

Аналогично, $\mathcal{L} \nvdash \Pi A \Rightarrow$, иначе $\mathcal{L} \vdash \Pi \Rightarrow \overline{A}$ и проходят те же рассуждения, с учетом того, что $\overline{A} \in \natural\Gamma$ и $\rhd\overline{A} \in |w\rangle$. Теперь погружаем секвенции $\Pi A \Rightarrow$ и $\Pi \Rightarrow A$ в $\widehat{\Gamma}$-полные секвенции $x, y \in W^{\Gamma}_{\mathcal{L}}$. Тогда $w{\uparrow}x, y$, поскольку $\sharp w = \Pi \subseteq \langle x|, \langle y|$. И по построению имеем: $A \in \langle x|$, $A \in |y\rangle$.

$\underline{\mathfrak{S} = \mathbf{4}.}$ Положим $\Pi := \sharp w$, $\Phi := \boxtimes\Pi$. Тогда $\mathcal{L} \nvdash \Pi\Phi \Rightarrow A$, иначе по правилу $(\Rightarrow^{\rhd}_{\mathbf{K4}})$ выводим: $\mathcal{L} \vdash \rhd(\Pi \vee A), \Phi \Rightarrow \rhd A$, поскольку $\Phi = \rhd\Sigma$ для некоторого Σ. Как и в случае $\mathfrak{S} = \mathbf{K}$, имеем $\rhd(\Pi \vee A) \subseteq \langle w|$. Кроме того, $\Phi = \boxtimes\sharp w \subseteq \langle w|$. Поэтому $\mathcal{L} \vdash w$, что невозможно. Погружаем секвенцию $\Pi\Phi \Rightarrow A$ в некоторый $y \in W^{\Gamma}_{\mathcal{L}}$. Остается проверить, что $w{\uparrow}y$. Имеем: $\sharp w = \Pi \subseteq \langle y|$, $\sharp w = \Pi \subseteq \sharp\boxtimes\Pi = \sharp\Phi \subseteq \sharp y$, поскольку $\Phi \subseteq \langle y|$. Аналогично доказывается, что $\mathcal{L} \nvdash \Pi\Phi A \Rightarrow$ и строится требуемый x.

$\underline{\mathfrak{S} = \mathbf{L}.}$ Как и в случае $\mathfrak{S} = \mathbf{4}$, строим Π, Φ, доказываем, пользуясь правилом $(\Rightarrow^{\rhd}_{\mathbf{GL}})$, что секвенция $\rhd A, \Pi, \Phi \Rightarrow A$ невыводима в $\mathcal{L}$, и погружаем ее в $y \in W^{\Gamma}_{\mathcal{L}}$. Как и для $\mathfrak{S} = \mathbf{4}$, можно доказать, что $\sharp w \subseteq \big(\sharp y \cap \langle y|\big)$; кроме того, $\rhd A \in |w\rangle$ и $\rhd A \in \langle y|$. Тем самым $w{\uparrow}y$. Аналогично строим x. ◀

Осталось проверить, что построенная шкала $F^{\Gamma}_{\mathcal{L}}$ является L-шкалой. Случай $\mathfrak{S} = \mathbf{K}$ тривиален.

Случай $\mathfrak{S} = \mathbf{4}$: если $w{\uparrow}x{\uparrow}y$, то $\sharp w \subseteq \big(\sharp x \cap \langle x|\big) \subseteq \sharp x \subseteq \big(\sharp y \cap \langle y|\big)$ и $w{\uparrow}y$; значит, $\uparrow$ транзитивно.

Случай $\mathfrak{S} = \mathbf{L}$: иррефлексивность отношения $\uparrow$ следует из второй строки определения $\langle 3^{\rhd}_{\mathbf{L}} \rangle$ и невыводимости рассматриваемых секвенций в $\mathcal{L}$. Докажем транзитивность отношения $\uparrow$.

Пусть $w{\uparrow}x{\uparrow}y$, тогда аналогично $\sharp w \subseteq \big(\sharp y \cap \langle y|\big)$. Далее, $\exists A {\in} \natural\Gamma$: $\rhd A \in |w\rangle$ и $\rhd A \in \langle x|$. Покажем, что $\rhd A \in \langle y|$. По лемме о дихотомии, возможны варианты:

а) $A \in \sharp x$, но $\sharp x \subseteq \sharp y$, поэтому $A \in \sharp y$, в частности, $\rhd(A \vee A) \in y$. Ввиду $\mathcal{L} \vdash \rhd(A \vee A) \Leftrightarrow \rhd A$ получаем $\rhd A \in \langle y|$.

б) $\overline{A} \in \sharp x$. Применимы те же рассуждения, ибо $\overline{A} \in \natural\Gamma$ и $\mathbf{K}^{\rhd} \vdash \rhd A \leftrightarrow \rhd\overline{A}$.

Теорема полностью доказана. $\dashv$

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ.

Список литературы

[1] Орлов И. Е., Исчисление совместности предложений. *Мат. сборник*, 1928, т. 35, № 3, pp. 263–286.

[2] K. Gödel, Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls, *Ergebnisse Math. Colloc.*, Bd. 4 (1933), S. 39–40.

[3] M. H. Löb, Solution of a problem of Leon Henkin, *Journal of Symbolic Logic*, 20 (1955), 115–118.

[4] R. Solovay, Provability interpretations of modal logics, *Israel Journal of Mathematics*, 25 (1976), pp. 287–304.

[5] H. Montgomery, R. Routley, Contingency and non-contingency bases for normal modal logics, *Logique et analyse*, v. 9 (1966), 318–328.

[6] H. Montgomery, R. Routley, Noncontingency axioms for $S4$ and $S5$, *Logique et analyse*, v. 11 (1968), 422–424.

[7] I. L. Humberstone, The logic of non-contingency, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 1995, 36(2):214–229.

[8] S. T. Kuhn, Minimal non-contingency logic, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 1995, 36(2):230–234.

[9] G. Boolos, *The Logic of Provability.* Cambridge University Press, 1993.

[10] A. Chagrov, M. Zakharyaschev, *Modal Logic*, Oxford Science Publications, 1997.